

Συνδυαστική Άσκηση

Δύο κάλπες, η Α και η Β, περιέχουν από 8 σφαιρίδια η κάθε μία. Στην Α υπάρχουν 5 λευκά και 3 μαύρα, ενώ στην Β, 1 λευκό και 7 μαύρα. Επιλέγουμε τυχαία μία κάλπη και από αυτήν βγάζουμε 2 σφαιρίδια χωρίς επανάθεση.

α) Ποια η πιθανότητα και τα δυο σφαιρίδια να είναι μαύρα;

β) Αν και τα δύο σφαιρίδια ήταν μαύρα, ποια είναι η πιθανότητα να βγήκαν από την κληρωτίδα Β;

γ) Αν και τα δύο σφαιρίδια ήταν μαύρα, ποια είναι η πιθανότητα να βγήκαν από την κληρωτίδα Α;

δ) Αν και τα δύο σφαιρίδια ήταν λευκά, ποια είναι η πιθανότητα να βγήκαν από την κληρωτίδα Α;

ε) Αν επαναλάβουμε το παραπάνω πείραμα $n=10$ φορές ποια η πιθανότητα στις 3 από αυτές και τα δυο σφαιρίδια να είναι μαύρα;

στ) Αν επαναλάβουμε το παραπάνω πείραμα $n=147$ φορές ποια η πιθανότητα να βγουν από την κάλπη δυο μαύρα σφαιρίδια τουλάχιστον 57 φορές.

Απάντηση: Εφαρμογή του Θεωρήματος ολικής πιθανότητας

α) Ονομάζουμε τα ενδεχόμενα

$A := \{ \text{επιλέγεται η κάλπη Α} \}$, $B := \{ \text{επιλέγεται η κάλπη Β} \}$, $2M := \{ \text{τα 2 σφαιρίδια είναι μαύρα} \}$

Κάλπη Α

5 Λευκά 3 Μαύρα

$$P(A) = \frac{1}{2}, \quad P(2M | A) = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{6}{56}$$

Κάλπη Β

1 Λευκό 7 Μαύρα

$$P(B) = \frac{1}{2}, \quad P(2M | B) = \frac{7}{8} \cdot \frac{6}{7} = \frac{42}{56}$$

$$P(2M) = P(2M | A) \cdot P(A) + P(2M | B) \cdot P(B) = \frac{6}{56} \cdot \frac{1}{2} + \frac{42}{56} \cdot \frac{1}{2} = \frac{48}{112} = \frac{3}{7}$$

Παρατήρηση: Με επανάθεση $P(2M | A) = \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{8}$ κ.ο.κ.

β) Εφαρμογή του θεωρήματος Bayes

$$P(B | 2M) = \frac{P(2M | B) \cdot P(B)}{P(2M)} = \frac{\frac{42}{56} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{3}{7}} = \frac{7}{8}$$

$$\gamma) P(A | 2M) = 1 - P(B | 2M) = \frac{1}{8}$$

δ) 100% χωρίς πράξεις...

ε) Γίνονται $n=10$ δοκιμές Bernoulli με σταθερή πιθανότητα επιτυχίας $p=3/7$ άρα Binomial(10, 3/7)

$$P(X = 3) = \binom{10}{3} \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^3 \cdot \left(\frac{4}{7}\right)^7 = \frac{(7!) \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{3!(7)!} \cdot 0,0787 \cdot 0,0199 = 0,188 \quad \text{ή } 18,8\%$$

$$\sigma\tau) \text{ Κ.Ο.Θ. } X \sim N(\mu = np, \sigma^2 = np(1-p)) \sim N\left(147 \cdot \frac{3}{7}, 147 \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{7}\right) \sim N(63, 6^2)$$

$$P(X > 57) = P\left(Z > \frac{57 - 63}{6}\right) \stackrel{\text{συμμετρία}}{=} P(Z > -1) = P(Z < 1) = \Phi(1) = 0,84$$

ΓΙΑ ΝΑ ΛΑΜΒΑΝΕΤΕ ΕΝΗΜΕΡΩΣΕΙΣ [ΑΚΟΛΟΥΘΗΣΤΕ ΜΑΣ ΣΤΟ FACEBOOK](#)