

Θέμα 1°

1α Μία επιχείρηση έχει αναλάβει παραγωγή για 200 μονάδες του προϊόντος της. Λόγω του μεγέθους της παραγγελίας αποφασίζεται για αυτή την παραγωγή να αξιοποιηθούν και τα δυο εργοστάσια της. Το συνολικό κόστος δίνεται από τη σχέση:
 $C = f(q_1, q_2) = 2q_1^2 + q_1q_2 + q_2^2 + 500$, όπου q_1 και q_2 οι ποσότητες που παράγονται στο εργοστάσιο 1 και 2 αντίστοιχα. Αν η επιχείρηση επιθυμεί την ελαχιστοποίηση του συνολικού κόστους, δεδομένου ότι η συνολική παραγωγή είναι ίση με 200 μονάδες, ποιες ποσότητες πρέπει να παράγει το κάθε εργοστάσιο; (να χρησιμοποιηθεί η μήτρα Hessian) (3 μονάδες)

$$\begin{aligned}
 & g(q_1, q_2) = \boxed{q_1 + q_2 = 200} \\
 & L = 2q_1^2 + q_1q_2 + q_2^2 + 500 + \lambda(200 - (q_1 + q_2)) \\
 & \text{f.o.c.} \quad \begin{cases} L_{q_1} = 0 \rightarrow 4q_1 + q_2 - \lambda = 0 \quad (1) \\ L_{q_2} = 0 \rightarrow q_1 + 2q_2 - \lambda = 0 \quad (2) \\ L_{\lambda} = 0 \rightarrow \boxed{q_1 + q_2 = 200} \quad (3) \end{cases} \quad \begin{aligned} & (Σ) \quad \begin{cases} (1) \quad 4q_1 + q_2 = \lambda \\ (2) \quad q_1 + 2q_2 = \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4q_1 + q_2 = q_1 + 2q_2 \\ \Rightarrow 3q_1 = q_2 \quad (4) \end{cases} \end{aligned} \\
 & (3) \xrightarrow{(4)} q_1 + 3q_1 = 200 \rightarrow q_1 = \frac{200}{4} \rightarrow \boxed{q_1^* = 50} \\
 & \quad \quad \quad (4) \quad \boxed{q_2^* = 150} \quad A(50, 150, 350) \\
 & (1) \rightarrow 4 \cdot 50 + 150 = \lambda \rightarrow \lambda = 350 \\
 & \text{s.o.c.} \quad H = \begin{bmatrix} 0 & g_{q_1 q_2} & g_{q_1 \lambda} \\ g_{q_1 q_1} & L_{q_1 q_1} & L_{q_1 \lambda} \\ g_{q_2 q_1} & L_{q_2 q_1} & L_{q_2 \lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \\
 & \det H = \begin{vmatrix} +0 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 - 1 + 1 = -1 < 0 \text{ άρα ελαχιστο}
 \end{aligned}$$

1β Αν η συνάρτηση ζήτησης είναι της μορφής: $Q^D = \beta P^{-1}$, όπου $\beta > 0$, να βρεθεί η ελαστικότητα ζήτησης ως προς την τιμή (P) και να γίνει οικονομική ερμηνεία αυτής της ελαστικότητας. (2 μονάδες)

Ελαστικότητα Ζήτησης

$$\begin{aligned}\epsilon_D &= \frac{dQ}{dP} \cdot \frac{P}{Q} = (\beta \cdot P^{-1})' \cdot \frac{P}{\beta P^{-1}} = \\ &= -\beta \cdot P^{-2} \cdot \frac{P}{\beta P^{-1}} = -1\end{aligned}$$

Μοναδιαία ελαστικότητα άρα εάν η τιμή αυξηθεί 1% τότε η ζητούμενη ποσότητα θα μειωθεί επίσης 1%.
Επίσης όταν η ελαστικότητα είναι μοναδιαία τότε τα έσοδα της επιχείρησης μεγιστοποιούνται

Θέμα 2°

2α. Η συνάρτηση οριακού κόστους ενός παραγωγού ηλεκτρικών συσκευών δίδεται από τη σχέση $MC = x(2x^2 + 5)^4$ όπου x είναι ο αριθμός των συσκευών που παράγονται. Επιπλέον, υπάρχει ένα σταθερό κόστος $FC=500$ ευρώ. Η συνάρτηση οριακών εσόδων της επιχείρησης δίδεται από τη σχέση $MR = 48 - 16x + x^2$. Να βρείτε (χρησιμοποιώντας το 'θέτω') τη συνάρτηση συνολικού κόστους, τη συνάρτηση κέρδους (Π) και τη συνάρτηση ζήτησης της επιχείρησης. (3 μονάδες)

$$\Pi = TR - TC$$

$$TR = \int MR dx = \int 48 - 16x + x^2 dx$$

$$= 48x - 8x^2 + \frac{x^3}{3}$$

Αρα η συνάρτηση ζήτησης είναι :

$$P_D = \frac{TR}{x} = 48 - 8x + \frac{x^2}{3}$$

$$TC = \int MC dx + FC =$$

$$= \int x(2x^2 + 5)^4 dx + 500 \quad (1)$$

$$\Gamma ι α \quad \int x(2x^2 + 5)^4 dx$$

$$\theta λ ω \quad u = 2x^2 + 5$$

$$du = 4x dx \rightarrow dx = \frac{du}{4x}$$

$$\alpha ρ α \quad I = \int x u^4 \frac{du}{4x} = \frac{1}{4} \int u^4 du$$

$$= \frac{1}{4} \frac{u^5}{5} = \frac{1}{20} (2x^2 + 5)^5$$

$$(1) \quad TC = \frac{1}{20} (2x^2 + 5)^5 + 500$$

Συνεπώς η συνάρτηση κερδών είναι :

$$\Pi = TR - TC =$$

$$= 48x - 8x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{1}{20} (2x^2 + 5)^5 - 500$$

2β. Δίνεται η συνάρτηση ζήτησης και η συνάρτηση προσφοράς: $Q_d = a + bP$ όπου $a > 0$ και $b < 0$ και $Q_s = c + dP$ όπου $c < 0$ και $d > 0$. Να εξετάσετε την ορθότητα της πρότασης που ακολουθεί: 'Δεν υφίσταται καμία προϋπόθεση για την ύπαρξη ισορροπίας σε ένα απλό γραμμικό μικροοικονομικό υπόδειγμα'. (2 μονάδες)

Ισορροπία $Q_d = Q_s \rightarrow$

$$a + bP = c + dP \rightarrow P(d - b) = a - c \rightarrow$$

$$\rightarrow P^* = \frac{a - c}{d - b}$$

Πρέπει $d - b \neq 0$ και $a - c > 0$ που ικανοποιούνται από εκφώνηση

$$Q^* = a + b \cdot \frac{a - c}{d - b} \rightarrow Q^* = \frac{a(d - b) + b(a - c)}{d - b}$$

$$Q^* = \frac{ad - bc}{d - b}$$

Η ποσότητα ισορροπίας πρέπει να είναι μεγαλύτερη του 0 άρα η προϋπόθεση είναι

$$ad > bc$$

Θέμα 3°

3α. Έστω η συνάρτηση ζήτησης $P = 20/(Q_d+1)$ και η συνάρτηση προσφοράς $P = 2 + Q_s$. Να βρεθεί το πλεόνασμα του καταναλωτή (CS) και του παραγωγού (PS) στο σημείο ισορροπίας (2 μονάδες).

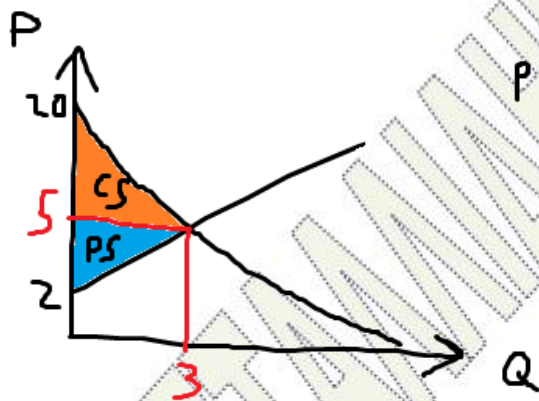
Σημείο Ισορροπίας $P_D = P_S \rightarrow$

$$\rightarrow \frac{20}{Q+1} = 2+Q \rightarrow (Q+1)(2+Q) = 20$$

$$\rightarrow Q^2 + 3Q - 18 = 0 \rightarrow$$

$$Q_{1,2} = \begin{matrix} \nearrow 3 \\ \searrow -6 \end{matrix} \quad \text{απορρίπτεται}$$

$$\text{αρα } Q^* = 3 \text{ και } P^* = 5$$



$$\begin{aligned} PS &= 5 \cdot 3 - \int_0^3 2+Q \, dQ \\ &= 15 - \left(2Q + \frac{Q^2}{2} \right) \Big|_0^3 \\ &= 15 - \left(2 \cdot 3 + \frac{3^2}{2} - 0 \right) \\ &= 15 - 10,5 = \boxed{4,5} \end{aligned}$$

$$CS = \int_0^3 \frac{20}{Q+1} \, dQ - 5 \cdot 3 =$$

$$= 20 \cdot \ln(Q+1) \Big|_0^3 - 15 =$$

$$= 20 \cdot (\ln 4 - \ln 1) - 15 = 12,726$$

3β. Δίνεται το πιο κάτω υπόδειγμα συμπεριφοράς του καταναλωτή $U = 5Q_1^{0,8} Q_2^{0,2}$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση χρησιμότητας είναι ομογενής πρώτου βαθμού. (1 μονάδα)

$$\begin{aligned} U(t \cdot Q_1, t \cdot Q_2) &= 5 \cdot (t Q_1)^{0,8} \cdot (t Q_2)^{0,2} \\ &= 5 \cdot t^{0,8} Q_1^{0,8} \cdot t^{0,2} Q_2^{0,2} \\ &= t^{0,8+0,2} \cdot 5 Q_1^{0,8} Q_2^{0,2} \\ &= t^1 \cdot U \end{aligned}$$

άρα είναι ομογενής 1ου βαθμού

3γ. Το οριακό προϊόν της εργασίας μίας επιχείρησης είναι $MP = 4L^{1/3}$, όπου L είναι εργασία. Αν η εργασία είναι η μοναδική εισροή που χρησιμοποιεί η επιχείρηση, να βρείτε συνάρτηση παραγωγής της. (2 μονάδες)

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dL} &= MP_L \rightarrow dQ = MP_L dL \\ \rightarrow \int dQ &= \int 4L^{1/3} dL \rightarrow \\ \rightarrow Q &= 4 \frac{L^{1/3+1}}{1/3+1} \rightarrow \\ \rightarrow Q &= 3L^{4/3} \quad \text{συνάρτηση παραγωγής} \end{aligned}$$

ΓΙΑ ΝΑ ΒΛΕΠΕΤΕ ΠΡΩΤΟΙ ΤΑ ΝΕΑ POST ΜΕ ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΟΠΩΣ ΕΠΙΣΗΣ ΓΙΑ ΝΑ ΣΑΣ ΑΠΑΝΤΑΜΕ ΔΩΡΕΑΝ ΑΠΟΡΙΕΣ

ΓΙΝΕΤΕ ΜΕΛΗ ΣΤΟ ΓΚΡΟΥΠ ΓΙΑ ΤΗΝ ΣΧΟΛΗ ΣΤΟ FACEBOOK

<https://www.facebook.com/groups/topa.panteios>