

Μαθηματικά 1 , Μιμής 2023 Φεβρουάριος

ΟΜΑΔΑ Α

Θέμα 1. Αν α, β, γ γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα, τότε και τα $(3\alpha+5\beta+\gamma)$, $(2\alpha-\beta+\gamma)$, $(\alpha+3\beta-2\gamma)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα.

Απάντηση : Αφου τα α, β, γ είναι γρ. ανεξάρτητα ισχύει ότι :

$$\lambda_1 \cdot \alpha + \lambda_2 \cdot \beta + \lambda_3 \cdot \gamma = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 \cdot (3\alpha + 5\beta + \gamma) + \lambda_2 \cdot (2\alpha - \beta + \gamma) + \lambda_3 \cdot (\alpha + 3\beta - 2\gamma) &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow (3\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3) \cdot \alpha + (5\lambda_1 - \lambda_2 + 3\lambda_3) \cdot \beta + (\lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3) \cdot \gamma &= 0 \xrightarrow{(1)} \end{aligned}$$

$$3\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0$$

$$5\lambda_1 - \lambda_2 + 3\lambda_3 = 0$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3 = 0$$

Μέθοδος Cramer

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \quad \text{άρα} \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

Αρά τα διανύσματα $(3\alpha+5\beta+\gamma)$, $(2\alpha-\beta+\gamma)$, $(\alpha+3\beta-2\gamma)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Θέμα 2. Να διερευνηθεί το σύστημα $2x+y+kz=0$, $-4x-2y-2z=0$, $(2k)x+y+(3k-2)z=0$.

Απάντηση: Πίνακας του συστήματος

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & k \\ -4 & -2 & -2 \\ 2k & 1 & 3k-2 \end{bmatrix}$$

Ορίζουσα

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & k \\ -4 & -2 & -2 \\ 2k & 1 & 3k-2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\Sigma 1 = \Sigma 1 - 2\Sigma 3]{\Sigma 2 = \Sigma 2 - \Sigma 3} \begin{bmatrix} 2(1-k) & 1-k & k \\ 0 & 0 & -2 \\ 4(1-k) & 3(1-k) & 3k-2 \end{bmatrix} =$$

$$= (1-k)(1-k) \begin{bmatrix} 2 & 1 & k \\ 0 & 0 & -2 \\ 4 & 3 & 3k-2 \end{bmatrix} \xrightarrow{2\eta \text{ γραμμή}} (1-k)(1-k) \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 4(1-k)^2$$

Αν $k=1$ τότε $\det(A) = 0$ άρα το σύστημα έχει άπειρες λύσεις

Για k διάφορο του 1 τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση την μηδενική.

Θέμα 3. (α) Πότε δύο πίνακες είναι όμοιοι ? Να αποδείξετε ότι οι όμοιοι πίνακες έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές.

(β) Να εξετάσετε αν η παρακάτω μήτρα είναι διαγωνοποιήσιμη

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

Απάντηση:

(α) Οι πίνακες A,B λέγονται όμοιοι αν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P ώστε $A = PBP^{-1}$.

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \det(PBP^{-1} - \lambda I) = \det(PBP^{-1} - \lambda PP^{-1}) = \det(P(B - \lambda I)P^{-1}) = \\ &= \det(P) \cdot \det(B - \lambda I) \cdot \det(P^{-1}) = \det(P) \cdot \det(P^{-1}) \cdot \det(B - \lambda I) = \det(B - \lambda I) \end{aligned}$$

Δηλαδή οι όμοιοι πίνακες έχουν το αυτό χαρακτηριστικό πολυώνυμο συνεπώς και τις ίδιες ιδιοτιμές.

(β) Εύρεση Ιδιοτιμών : $\det(A - \lambda I) = 0$

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 4-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (4-\lambda) \begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 \\ -1 & 5-\lambda \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 5-\lambda \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 0 & 4-\lambda \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (4-\lambda)[(4-\lambda)(5-\lambda)-1] - 0 - [4-\lambda] = 0 \xrightarrow{\text{κοινός παράγοντας}} (4-\lambda)[(\lambda^2 - 9\lambda + 19) - (1)] = 0$$

$$\Rightarrow (4-\lambda)(\lambda^2 - 9\lambda + 18) = 0 \Rightarrow (4-\lambda)(6-\lambda)(3-\lambda) = 0$$

Άρα ιδιοτιμές : $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 6, \lambda_3 = 3$

Οι ιδιοτιμές είναι διαφορετικές μεταξύ τους άρα ο πίνακας διαγωνοποιείται.

Θέμα 4. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x, y) = x^2 + y^2 - 3ax - xy$ παρουσιάζει ακρότατο και να βρεθεί.

Απάντηση : Κρίσιμο $(2a, a)$ και αντιστοιχεί σε ελάχιστο

ΟΜΑΔΑ Β

Θέμα 1. Να δοθεί ο ορισμός της τάξης ενός πίνακα. Να εξετάσετε την τάξη του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Απάντηση : Ονομάζουμε **τάξη ενός πίνακα** το πλήθος των γραμμικά ανεξάρτητων γραμμών του, (ή την διάσταση της μέγιστης μη μηδενικής υποορίζουσας του)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\Gamma_3 = \Gamma_3 - \lambda \Gamma_1]{\Gamma_2 = \Gamma_2 - \Gamma_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda - 1 & 1 - \lambda \\ 0 & 1 - \lambda & 1 - \lambda^2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\Gamma_3 = \Gamma_3 / (1 - \lambda)]{\Gamma_2 = \Gamma_2 / (\lambda - 1)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 + \lambda \end{bmatrix} \xrightarrow{\Gamma_3 = \Gamma_3 - \Gamma_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda + 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -2 & \text{τότε } \text{rank} A = 2 \\ \lambda \neq -2 & \text{και } \lambda \neq 1 & \text{τότε } \text{rank} A = 3 \end{cases}$$

Αν $\lambda = 1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ τότε } r(A) = 1$$

Θέμα 2. Να διερευνηθεί το σύστημα $\lambda x + y + z = 1$, $x + \lambda y + z = 1$, $x + y + \lambda z = 1$.

Απάντηση : Πίνακας του συστήματος

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{bmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ορίζουσα

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{bmatrix} \xrightarrow[\Gamma_3 = \Gamma_3 - \lambda \Gamma_1]{\Gamma_2 = \Gamma_2 - \Gamma_1} \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 - \lambda & \lambda - 1 & 0 \\ (1 - \lambda)(1 + \lambda) & 1 - \lambda & 0 \end{bmatrix} = (1 - \lambda)(1 - \lambda) \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ (1 + \lambda) & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{3η στήλη}} \\ = (1 - \lambda)^2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 + \lambda & 1 \end{vmatrix} = (1 - \lambda)^2 \cdot (2 + \lambda)$$

Για $\lambda = 1$ τότε $D = 0$ και επίσης $Dx = Dy = Dz = 0$ άρα έχει άπειρες λύσεις

Για $\lambda = -2$ τότε $D = 0$, $Dx = 9$ άρα αδύνατο το σύστημα

Για $\lambda \neq 1$ και $\lambda \neq -2$ το σύστημα έχει μοναδική λύση.

Θέμα 3. Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

(α) Να βρεθούν οι χαρακτηριστικές τιμές και τα χαρακτηριστικά διανύσματα του A

(β) Να βρεθεί ο πίνακας P για τον οποίο ο $P^{-1}AP$ είναι διαγώνιος.

Απάντηση : (α) Ιδιοτιμές $\lambda_1 = 5$ και $\lambda_2 = -1$, ιδιοδιανύσματα $(1, 1)$, $(-2, 1)$

(β) $P = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

Θέμα 4. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x, y) = 2x^3 + 5x^2 + xy + y^2$ παρουσιάζει ακρότατο και να βρεθεί.

Απάντηση : Κρίσιμα $A(0,0)$ και $B(-38/24, 19/24)$ και τα 2 σαγματικά

ΟΜΑΔΑ Δ

Θέμα 1. Θεωρούμε τα διανύσματα $v_1^T = (0, -1)$, $v_2^T = (-4, 1)$ και $v_3^T = (2, -1)$ του R^2

α) Να εκφραστεί το v_1 ως γραμμικός συνδυασμός των v_2 και v_3 .

β) Να δείξετε ότι τα v_2, v_3 αποτελούν βάση του R^2 .

Απάντηση : (α)

$$v_1 = x \cdot v_2 + y \cdot v_3 \Rightarrow$$

$$(0, -1) = (-4x, x) + (2y, -y) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -4x + 2y = 0 \\ x - y = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -4y + 4 + 2y = 0 \\ x = y - 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$\text{Άρα } v_1 = v_2 + 2 \cdot v_3$$

(β) Αρκεί να δείξουμε ότι τα 2 διανύσματα είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Θέμα 2. Να δοθεί ο ορισμός του αντίστροφου ενός πίνακα και να υπολογίσετε τον αντίστροφο του

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & \beta & 0 \\ \gamma & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Απάντηση : Αντίστροφος ενός τετραγωνικού πίνακα A , συμβολίζεται A^{-1} και ισχύει $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. Ένας πίνακας αντιστρέφεται αν και μόνο αν $\det A \neq 0$.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/\gamma \\ 0 & 1/\beta & 0 \\ 1/\alpha & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Θέμα 3. Πότε η τετραγωνική μορφή $6x_1^2 + x_2^2 + \lambda x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$ είναι θετικά ορισμένη

Απάντηση : Για $\lambda > 3/2$.

Θέμα 4. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x, y) = x^3 - 4x^2 - xy - y^2 + 1$ παρουσιάζει ακρότατο και να βρεθεί.

Απάντηση : Κρίσιμα $A(0,0)$ $B(5/2, -15/12)$

Στο A τοπικό μέγιστο. Στο B σαγματικό σημείο.