ΤΟΕ – Στατιστικη 1 – 2023 Σεπτέμβριος

Θέμα 1.

(α) (βαθμοί 1,5) Δίνονται στοιχεία τιμών (p) – σε € – και ποσοτήτων (q) – σε χιλιάδες τεμάχια – 3 προϊόντων που πουλήθηκαν κατά τα έτη 2020 και 2022.

Προϊόν	p_{20}	p_{22}	q_{20}
Α	3	4	50
Β	5	7	25
Γ	10	12	10

Αν η αξία των προϊόντων το 2022 ήταν 400 χιλιάδες €,
Να υπολογιστεί η αποπληθωρισμένη (πραγματική) αξία των προϊόντων αυτών κατά το 2022 σε τιμές 2020.
i) να υπολογιστεί ο κατάλληλος δείκτης όγκου για το 2022 έναντι του 2020.

$$V_{22} = \sum p_{22} \cdot q_{22} = 400$$

Τιμάριθμος Laspeyres

$$P_{22,20} = \frac{\sum P_{22} \cdot q_{20}}{\sum P_{20} \cdot q_{20}} \cdot 100 = \frac{4 \cdot 50 + 7 \cdot 25 + 12 \cdot 10}{3 \cdot 50 + 5 \cdot 25 + 10 \cdot 10} \cdot 100$$

$$= \frac{495}{375} \cdot 100 = 132$$

$$V_{22}^{Αποπ/20} = \frac{400}{132} \cdot 100 = 303{,}03 \text{ χιλ. €}$$

i) Δεικτης όγκου Paasche

$$Q'_{22,20} = \frac{\sum P_{22} \cdot q_{22}}{\sum P_{22} \cdot q_{20}} \cdot 100$$

$$= \frac{400}{495} \cdot 100 = 80{,}8$$

(β) (βαθμοί 2) Ο μέσος αριθμός σφαλμάτων ανά χιλιοστό του δευτερολέπτου κατά τη μεταβίβαση σήματος από ένα κινητό τηλέφωνο προς τη βάση αναμετάδοσης περιγράφεται από γνωστή κατανομή και λαμβάνει την τιμή 3. Υπολογίστε την πιθανότητα (i) να υπάρξει το πολύ ένα σφάλμα κάποιο τυχαίο χιλιοστό (ii) να συμβούν τουλάχιστον 3 σφάλματα τα επόμενα 2 χιλιοστά του δευτερολέπτου.

Poisson $\lambda = 3 \ / \ 1\,ms$

i) $P(X \leq 1) = P(X=0) + P(X=1)$

$$= \frac{e^{-3} \cdot 3^0}{0!} + \frac{e^{-3} \cdot 3^1}{1!}$$

$$= e^{-3} + 3e^{-3} = 4 \cdot e^{-3} = 0{,}199$$

ii) $\lambda' = 2 \cdot 3 = 6$

$$P(X \geq 3) \overset{\sigma\upsilon\mu\pi}{=\!=} 1 - P(X < 3)$$

$$= 1 - (P(0) + P(1) + P(2))$$

$$= 1 - \left(\frac{e^{-6} \cdot 6^0}{0!} + \frac{e^{-6} \cdot 6^1}{1!} + \frac{e^{-6} \cdot 6^2}{2!} \right)$$

$$= 1 - 25 \cdot e^{-6} = 0{,}938$$

(γ) (βαθμός 1,5). Έστω X, Y τ.μ. με πεδίο τιμών το σύνολο {0,1} και από κοινού σ.π. p(0,0) =p(0,1)=p(1,0)=p(1,1)=1/4. Έστω Z=XY. Υπολογίστε **i)** P(Z=1 | X=1), **ii)** P(Z=1 | X=0) **iii)** E(ZX) .

X \ Y	0	1	P_x
0	1/4	1/4	2/4
1	1/4	1/4	2/4
P_y	2/4	2/4	

X	Y	Z	P
0	0	0	1/4
0	1	0	1/4
1	0	0	1/4
1	1	1	1/4

i) $P(Z=1 \mid X=1) = \dfrac{P(X=1 \cap Z=1)}{P(X=1)} = \dfrac{1/4}{2/4} = 1/2$

ii) $P(Z=1 / X=0) = \dfrac{P(X=0 \cap Z=1)}{P(X=0)} = \dfrac{0}{2/4} = 0$

P	ZX
1/4	0
1/4	0
1/4	0
1/4	1

ZX	0	1
P	3/4	1/4

$E(ZX) =$

$= 0 \cdot \frac{3}{4} + 1 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

Θέμα 2.

(α) (βαθμοί 1,5) Στον πίνακα δίδεται η κατανομή των μηνιαίων διαφημιστικών δαπανών(X) 20 εταιρειών, σε χιλ. Ευρώ.

Δαπάνες, χιλ. Ευρώ	Αριθμός εταιρειών
30 - < 50	3
50 - 70	3
70 - 90	8
90 - 110	5
110 - 130	1

(i) Να βρεθεί και να ερμηνευθεί η διάμεσος διαφημιστική δαπάνη.

(ii) Να υπολογισθεί ο συντελεστής ασυμμετρίας κατά Pearson. Χαρακτηρίστε την κατανομή αν είναι συμμετρική ή (αν είναι μη συμμετρική) περιγράψτε το είδος ασυμμετρίας της.

Δαπάνες, χιλ. Ευρώ	Αριθμός εταιρειών	x^{κ}	F
30 - < 50	3	40	3
50 - 70	3	60	6
70 - 90	8	80	14
90 - 110	5	100	19
110 - 130	1	120	20

i) Η ομάδα στην οποία ανήκει η διάμεσος έχει αθροιστική κατανομή $F \geq \frac{n}{2} = \frac{20}{2} = 10$

αρα $M \in (70-90)$

$$M = L_M + \delta \, \frac{\frac{n}{2} - F_{M-1}}{f_M} = 70 + 20 \, \frac{\frac{20}{2} - 6}{8} = 80$$

ii) $S_p = 3 \, \frac{\bar{x} - M}{s}$

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i \cdot x^{\kappa}}{n} = \frac{3 \cdot 40 + 3 \cdot 60 + 8 \cdot 80 + 5 \cdot 100 + 1 \cdot 120}{20}$$

$$= \frac{1560}{20} = 78$$

$$s^2 = \frac{\sum f_i (x^{\kappa} - \bar{x})^2}{n} = \frac{3 \cdot (40-78)^2 + 3(60-78)^2 + 8(80-78)^2 + 5(100-78)^2 + 1(120-78)^2}{20}$$

$$= \frac{9520}{20} = 476 \longrightarrow s = \sqrt{476} = 21{,}8$$

αρα $S_p = 3 \, \frac{78 - 80}{21{,}8} = -0{,}27 < 0$ αρνητική ασυμμετρία ή αριστερή λοξότητα

(β) (βαθμοί 2) Στην κοπή της Πρωτοχρονιάτικης πίτας μιας εταιρίας παρευρίσκονται δέκα άτομα. Η πίτα είναι κομμένη σε δέκα πανομοιότυπα κομμάτια (όσα και οι παρόντες) και το ένα από αυτά περιέχει μία χρυσή λίρα. Τα κομμάτια επιλέγονται τυχαία ένα προς ένα και μοιράζονται στους παρευρισκόμενους. Βρείτε την πιθανότητα α) το 2ο, κομμάτι να περιέχει τη χρυσή λίρα β) το 4ο κομμάτι να περιέχει τη χρυσή λίρα. Τι παρατηρείτε;

a) $P(O_1 \cap N_2) = \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{10}$

β) $P(O_1 \cap O_2 \cap O_3 \cap N_4) = \frac{9}{10} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{10}$

Η πιθανοτητα να είναι σε ένα οποιοδήποτε απο τα 10 κομμάτια είναι σταθερή και ίση με 1/10

(γ) (βαθμός 1,5). Ένα δοχείο περιέχει 5 κόκκινα, 4 μπλε και 6 πράσινα σφαιρίδια. Επιλέγουμε τυχαία τρία σφαιρίδια χωρίς επανάθεση. Ποιά είναι η πιθανότητα (i) να είναι όλα το ίδιο χρώμα, (ii) να είναι όλα διαφορετικό χρώμα. Δικαιολογείστε την απάντησή σας.

$\boxed{\begin{array}{ll} 5 & Κ \\ 4 & Μ \\ 6 & Π \end{array}} \xrightarrow{3}$ χωρίς επαναθ.

i) $P(K=3) + P(M=3) + P(Π=3)$

$\boxed{\begin{array}{l} 5Κ \\ 10Υ \end{array}}$ $\boxed{\begin{array}{l} 4Μ \\ 11Υ \end{array}}$ $\boxed{\begin{array}{l} 6Π \\ 9Υ \end{array}}$

$$\frac{\binom{5}{3}\cdot\binom{10}{0}}{\binom{15}{3}} + \frac{\binom{4}{3}\cdot\binom{11}{0}}{\binom{15}{3}} + \frac{\binom{6}{3}\cdot\binom{9}{0}}{\binom{15}{3}}$$

$\boxed{\begin{array}{ll} 5 & Κ \\ 4 & Μ \\ 6 & Π \end{array}} \xrightarrow{3}$ χωρίς επαναθ.

$$P(ΚΜΠ) = \frac{5}{15} \cdot \frac{4}{14} \cdot \frac{6}{13} = \frac{120}{2730}$$

$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ μεταθέσεις

$$\left.\begin{array}{l} ΚΜΠ \\ ΚΠΜ \\ ΜΚΠ \\ ΜΠΚ \\ ΠΚΜ \\ ΠΜΚ \end{array}\right\} \quad ii)\ 6 \cdot \frac{120}{2730}$$

Θέμα 3.

(α) (βαθμοί 2) Ένας επενδυτής επενδύει σε τρία αμοιβαία κεφάλαια (A1, A2 και A3) τα χρήματά του, σε ποσοστό 48% στο A1, 16% στο A2 και 36% στο A3. Αν η πιθανότητα αρνητικής απόδοσης είναι 9% στο A3, 7,5% στο A1 και 19,75% στο A2, ποια είναι η πιθανότητα να παρουσιάσει αρνητική απόδοση η συνολική του επένδυση; Αν ένα αμοιβαίο δεν είχε αρνητική απόδοση, ποια είναι η πιθανότητα να είναι το A2;

Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας

$A \to A_1$

$B \to A_2$

$\Gamma \to A_3$

$E \to$ αρνητικη αποδοση

α) θοπ $P(E) = P(E|A_1)\cdot P(A_1) + P(E|A_2)P(A_2) + P(E|A_3)\cdot P(A_3)$

$= 0{,}075 \cdot 0{,}48 + 0{,}1975 \cdot 0{,}16 + 0{,}09 \cdot 0{,}36 = 0{,}1$

ή 10%

β) $P(A_2 | E^c) = \dfrac{\boxed{P(E^c|A_2)}\, P(A_2)}{P(E^c)} = \dfrac{(1-0{,}1975)\cdot 0{,}16}{1-0{,}1}$

$= \dfrac{0{,}1284}{0{,}9} = 0{,}1427$

(β) (βαθμός 1,5). Ένα δοχείο περιέχει 4 μπλε και 6 κίτρινα σφαιρίδια. Επιλέγουμε τυχαία τρία σφαιρίδια με επανάθεση. Ποιά είναι η πιθανότητα (i) να είναι όλα το ίδιο χρώμα; (ii) να είναι όλα διαφορετικό χρώμα; Δικαιολογείστε την απάντησή σας.

4 Μ

6 Κ

$\xrightarrow{3}$

ΜΕ επάναθεση
άρα Δυωνυμικη

$P(M) = \frac{4}{10} = 0{,}4$

$P(K) = \frac{6}{10} = 0{,}6$

i) $P(M=3) + P(K=3)$ (1)

$P(M=3)$ δυωνυμικη n=3 και p=0,4

$P(M=3) = \binom{3}{3} 0{,}4^3 \cdot 0{,}6^0 = 0{,}064$

$P(K=3)$ δυωνυμικη n=3 και p=0,6

$P(K=3) = \binom{3}{3} 0{,}6^3\ 0{,}4^0 = 0{,}216$

(1) $P(M=3) + P(K=3) = 0{,}064 + 0{,}216 = 0{,}28$

ii)

δεδομενου ότι είναι σφαιρίδια 2 ειδών δεν γίνεται σε 3 επιλογές να είναι ολα διαφορετικού χρώματος άρα P=0

(γ)(βαθμός 1,5) Η τιμή της ενέργειας αυξήθηκε κατά 75% από το 2015 μέχρι το 2022. Να υπολογιστεί ο μέσος ετήσιος ρυθμός αύξησή της για τα έτη αυτά.

$$\left(1,75\right)^{1/7} = \left((1+r)^{7}\right)^{1/7}$$

$$1,0832 = 1+r$$

$$r_{ετ} = 0,0832 \text{ ή } 8,32\%$$

Για να λαμβάνεται ενημερώσεις για νέα λυμένα θέματα

γραφτείτε στο γκρούπ της σχολής του

#Φοιτητικού_Διδασκαλείου

για το Οικονομικό Νομικής

https://www.facebook.com/groups/oikonomiko.nomikhs