Μαθηματικά 2 Σεπτέμβρης 2023 – Μελάς

Θέμα 1°(2 μονάδες)

A) (1 μονάδα) Να λύσετε με τη μέθοδο του αντιστρόφου πίνακα το σύστημα

$$\begin{aligned} x+y+z &= 1 \\ y+z &= 1 \\ z &= 1. \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 1 \quad A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x = A^{-1} b = \underset{3\times3}{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \underset{3\times1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{αρα} \quad (x, y, z) = (0 \;\; 0 \;\; 1)$$

B) (1 μονάδα) Βρείτε (με τη μέθοδο *Cramer*) τις τιμές του λ για τις οποίες το σύστημα

$$\begin{aligned} \lambda x + y &= 0 \\ x + \lambda y &= 0 \end{aligned}$$

έχει και λύσεις εκτός της μηδενικής.

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$|A| = \lambda^2 - 1$$

Απειρου $\longrightarrow |A| = 0 \longrightarrow \lambda = \pm 1$

Θέμα 2ο (2 μονάδες)

Δίνεται ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Να βρεθεί ο πίνακας A^{100}.

Ιδιοτιμές $\begin{vmatrix} 4-\lambda & 3 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \rightarrow (4-\lambda)(2-\lambda) - 3 = 0$

$\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$

$\Delta = 16 \quad \lambda_{1,2} = \dfrac{6 \pm 4}{2} \begin{matrix} \nearrow 5 \\ \searrow 1 \end{matrix}$

Ιδιοδιανύσματα Για $\lambda = 5$ $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} -x + 3y = 0 \rightarrow x = 3y \\ \cancel{x - 3y = 0} \end{matrix}$

$(x, y) = (3y, y) = y\,(3, 1)$

Για $\lambda = 1$ $\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow$ $\begin{matrix} 3x + 3y = 0 \rightarrow x = -y \\ \cancel{x + y = 0} \end{matrix}$

$(x, y) = (-y, y) = y\,(-1, 1)$

$$A^{100} = P \cdot D^{100} \cdot P^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5^{100} & 0 \\ 0 & 1^{100} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

Θέμα 3ο (2 μονάδες)

Βρείτε και χαρακτηρίστε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x, y) = x^3 - 3x - y^2 + 4y$.

$$\left.\begin{array}{l} f_x=0 \\ f_y=0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 3x^2-3=0 \rightarrow x^2=1 \rightarrow x=\pm 1 \\ -2y+4=0 \rightarrow y=2 \end{array}$$

κρίσιμα $A(1,2)$ $B(-1,2)$

$$H=\begin{bmatrix} 6x & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$A(1,2)$ $H_A=\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ $f_{xx}=6>0$ σάγμα $|H|=-12<0$

$B(-1,2)$ $H_B=\begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ $f_{xx}=-6<0$ τοπ. μέγιστο $|H|=12>0$

Θέμα 4ο (2 μονάδες)

Εστω ότι ένας καταναλωτής έχει συνάρτηση χρησιμότητας $U(x,y)=x^{0.5}y^{0.5}$. Η τιμή του αγαθού x είναι 2 χρηματικές μονάδες και η τιμή του αγαθού y είναι 3 χρηματικές μονάδες. Ο καταναλωτής έχει διαθέσιμο εισόδημα 100 χρηματικές μονάδες. Πόσο πρέπει να αγοράσει από τα 2 αγαθά ο καταναλωτής για να μεγιστοποιήσει τη χρησιμότητά του;

$$L=x^{0,5}y^{0,5}-\lambda(2x+3y-100)$$

$L_x=0 \rightarrow 0{,}5x^{-0,5}y^{0,5}-2\lambda=0$ (1)

$L_y=0 \rightarrow 0{,}5x^{0,5}y^{-0,5}-3\lambda=0$ (2)

$L_\lambda=0 \rightarrow 2x+3y=100$ (3)

$\frac{(1)}{(2)}$ $\frac{y}{x}=\frac{2}{3} \rightarrow y=\frac{2}{3}x$ (4)

$(3) \xrightarrow{(4)} 2x+3\cdot\frac{2}{3}x=100 \rightarrow 4x=100 \rightarrow x=25$

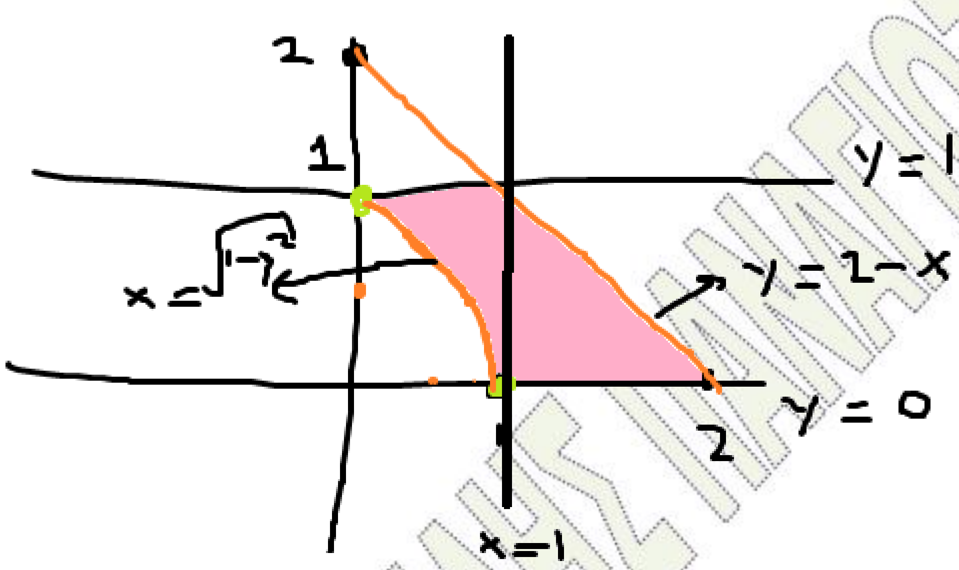
$(4) \rightarrow y=\frac{50}{3}$

Θέμα 5° (2 μονάδες)

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$I = \int_0^1 \left(\int_{\sqrt{1-y^2}}^{2-y} x\,dx \right) dy.$$

Είναι η περιοχή ολοκλήρωσης τύπου I ή τύπου II; Σχεδιάστε την περιοχή ολοκλήρωσης. Γράψτε και πάλι το I αλλάζοντας την σειρά ολοκλήρωσης χωρίς να υπολογίσετε και πάλι το ολοκλήρωμα. Είναι η περιοχή ολοκλήρωσης τώρα τύπου I ή τύπου II; Εξηγείστε.



$$\int_0^1 \left(\int_{\sqrt{1-y^2}}^{2-y} x\,dx \right) dy = \int_0^1 \left[\frac{1}{2}x^2\right]_{\sqrt{1-y^2}}^{2-y} dy = \frac{1}{2}\int_0^1 (2-y)^2 - (1-y^2)\,dy$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 4 - 4y + y^2 - 1 + y^2\,dy = \frac{1}{2}\int_0^1 2y^2 - 4y + 3\,dy = \frac{1}{2}\left[\frac{2y^3}{3} - \frac{4y^2}{2} + 3y\right]_0^1$$

$$x = \sqrt{1-y^2} \rightarrow x^2 = 1 - y^2 \rightarrow y^2 = 1 - x^2 \rightarrow y = \sqrt{1-x^2}$$

$$I = \int_0^1 \int_{y=\sqrt{1-x^2}}^{y=1} x\,dy\,dx + \int_1^2 \int_{y=0}^{y=2-x} x\,dy\,dx$$