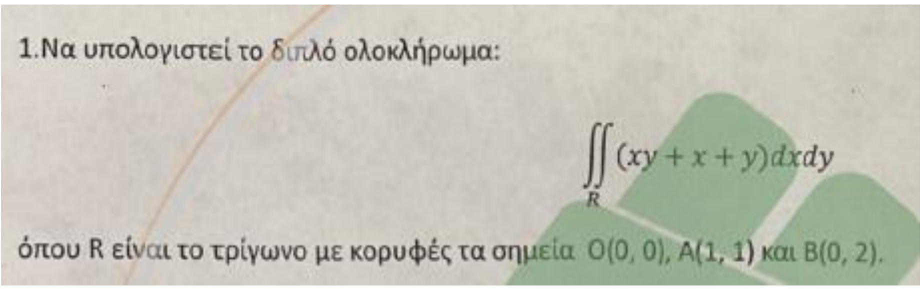
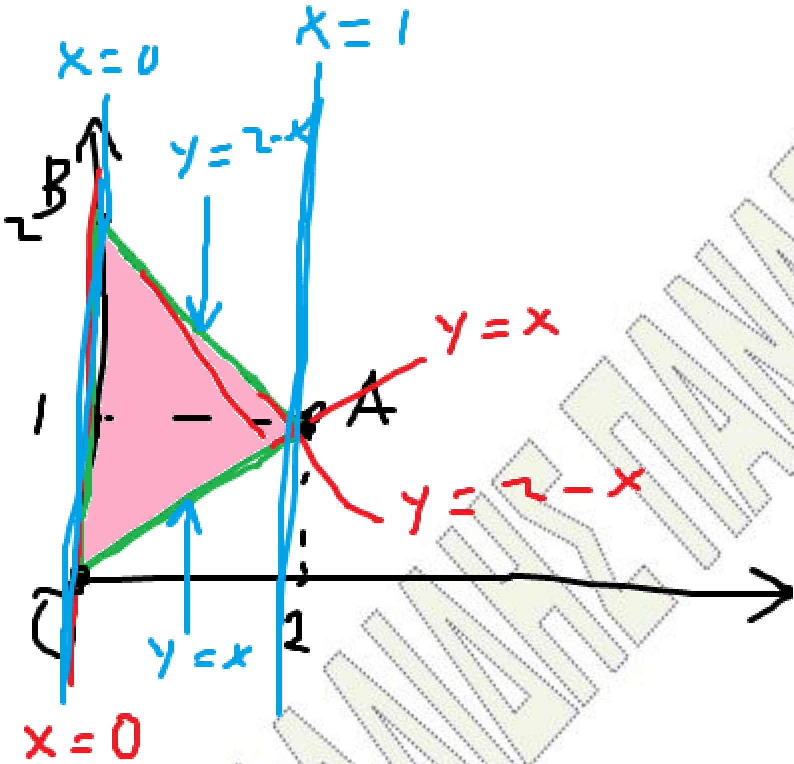
ΤΟΕ Μαθηματικά 2 -   Λεβεντίδης Ιουνιος 2023



1.Να υπολογιστεί το διπλό ολοκλήρωμα:

$$\iint_R (xy + x + y)dxdy$$

όπου R είναι το τρίγωνο με κορυφές τα σημεία O(0, 0), A(1, 1) και B(0, 2).



...ρος x :

$$\int_{x=0}^{x=1}\left(\int_{y=x}^{y=2-x}(xy+x+y)\,dy\right)dx \quad = F(b)-F(a)$$

$$\downarrow$$

$$\int_{x=0}^{x=1}\left[x\cdot\frac{y^2}{2}+x\cdot y+\frac{y^2}{2}\right]_{y=x}^{y=2-x}dx$$

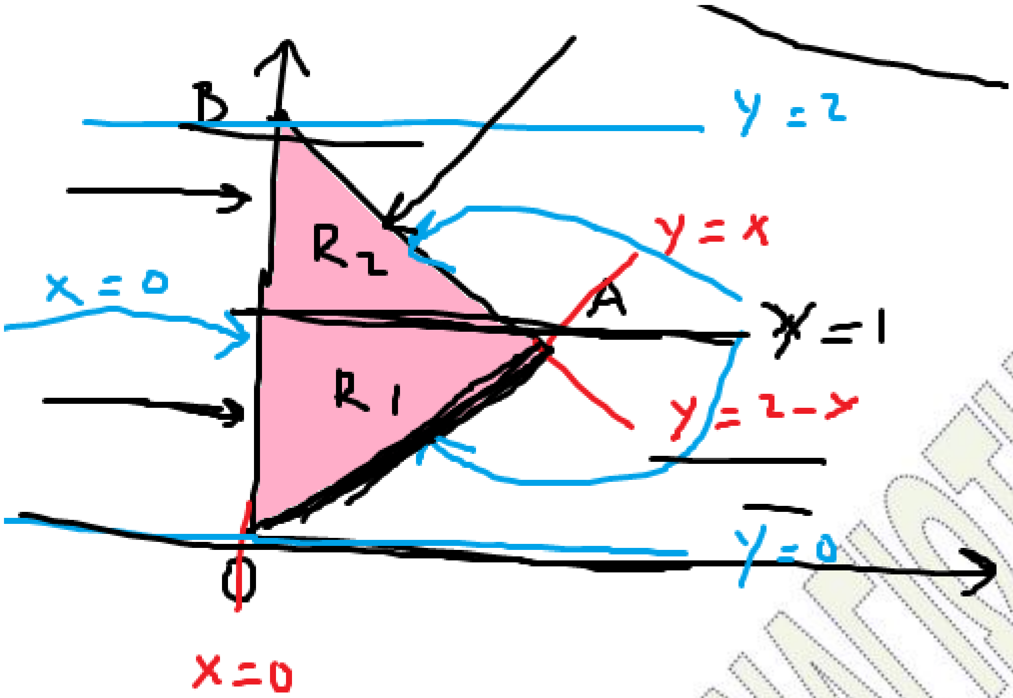
$$\rightarrow \int_{x=0}^{x=1} x\cdot\frac{1}{2}(2-x)^2+x(2-x)+\frac{1}{2}(2-x)^2-\left(x\cdot\frac{x^2}{2}+x^2+\frac{x^2}{2}\right)$$

$$=\int_0^1 2x-2x^2+\frac{1}{2}x^3+2x-x^2+2-2x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{2}-x^2-\frac{x^2}{2}\,dx$$

$$=\int_0^1 -4x^2+2x+2\,dx=\left[-4\frac{x^3}{3}+2\frac{x^2}{2}+2x\right]_0^1$$

$$=-\frac{4}{3}+\frac{2}{2}+2-0=5/3$$

EXTRA - ΑΛΛΑΓΗ ΣΕΙΡΑΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ



$$\iint_R = \iint_{R_1} + \iint_{R_2}$$

$$= \int_{y=0}^{y=1}\int_{x=0}^{x=y} xy+x+y \, dx\,dy + \int_{y=1}^{y=2}\int_{x=0}^{x=2-y} xy+x+y \, dx\,dy$$

$$\int_{y=0}^{y=1}\left[\frac{x^2}{2}y+\frac{x^2}{2}+yx\right]_{x=0}^{x=y} dy + \int_{y=1}^{y=2}\left[\frac{x^2}{2}y+\frac{x^2}{2}+y\cdot x\right]_{x=0}^{x=2-y} dy$$

$$\int_{y=0}^{y=1} \frac{y^3}{2} + \frac{y^2}{2} + y^2 - 0\,dy + \int_{y=1}^{y=2} \frac{y}{2}(2-y)^2 + \frac{1}{2}(2-y)^2 + y\cdot(2-y) - 0\,dy$$

$$\frac{1}{2}\frac{y^4}{4} + \frac{1}{2}\frac{y^3}{3} + \frac{y^3}{3}\Big]_0^1 + \int_1^2 \frac{y}{2}(4-4y+y^2) + \frac{1}{2}(4-4y+y^2) + 2y - y^2\,dy$$

$$= \frac{1}{8} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} - 0 + \int_1^2 2y - 2y^2 + \frac{y^3}{2} + 2 - 2y + \frac{y^2}{2} + 2y - y^2\,dy$$

$$= \frac{3+4+8}{24} + \int_1^2 \frac{y^3}{2} + \frac{5}{2}y^2 + 2y + 2\,dy$$

$$\frac{15}{24} + \left[\frac{1}{2}\frac{y^4}{4} + \frac{5}{2}\frac{y^3}{3} + 2\frac{y^2}{2} + 2y\right]_1^2 = \frac{5}{3}$$

2.Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 3y$ χρησιμοποιώντας τις συνθήκες πρώτης και δεύτερης τάξης.

Τα κρίσιμα σημεία προκύπτουν απο το σύστημα των πρώτων μερικών παραγώγων

$$f_x = 0 \rightarrow 2x - 2 = 0 \rightarrow x = 1$$

$$f_y = 0 \rightarrow 2y - 3 = 0 \rightarrow y = 3/2$$

μοναδικό κρίσιμο σημείο $A(1, 3/2)$

Ο χαρακτηρισμός γίνεται με τον Εσσιανό πίνακα

$$H = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} D_1 &= f_{xx} = 2 > 0 \\ D_2 &= |H| = 4 > 0 \end{aligned}\right\} \text{αρα ελαχιστο}$$

$$f_{min} = f(1, 3/2)$$

<u>Παρατήρηση:</u> Το σημείο είναι και ΟΛΙΚΟ ελάχιστο καθώς ο Εσσιανός είναι θετικά ορισμένος σε κάθε σημείο

3.Να μεγιστοποιηθεί η συνάρτηση $f(x, y) = x+y$, υπό τον περιορισμό $x^2 + 3y^2 = 4$

Ορίζουμε την συνάρτηση Lagrange

$$L = x+y-\lambda(x^2+3y^2-4)$$

$$L_x=0 \to 1-2\lambda x=0 \to x=1/2\lambda$$

$$L_y=0 \to 1-6\lambda y=0 \to y=1/6\lambda$$

$$L_\lambda=0 \to x^2+3y^2=4 \longrightarrow \frac{1}{4\lambda^2}+\frac{3}{36\lambda^2}=4$$

$$\longrightarrow \frac{12}{36\lambda^2}=4 \to \lambda^2=\frac{1}{12} \to \lambda=\pm 1/\sqrt{12}$$

• $\lambda=+\frac{1}{\sqrt{12}} \to x=\sqrt{12}/2 \, , \, y=\sqrt{12}/6$

κρισιμο $A\left(\frac{\sqrt{12}}{2}, \frac{\sqrt{12}}{6}, 1/\sqrt{12}\right)$

• $\lambda=-\frac{1}{\sqrt{12}} \, , \, x=-\frac{\sqrt{12}}{2} \, , \, y=-\frac{\sqrt{12}}{6}$

κρισιμο $B\left(-\frac{\sqrt{12}}{2}, -\frac{\sqrt{12}}{6}, -1/\sqrt{12}\right)$

Πλαισιωμένος Εσσιανός

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 2x & 6y \\ 2x & -2\lambda & 0 \\ 6y & 0 & -6\lambda \end{bmatrix}$$

Στο A $\quad H_A = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{12} & \sqrt{12} \\ \sqrt{12} & -2/\sqrt{12} & 0 \\ \sqrt{12} & 0 & -6/\sqrt{12} \end{bmatrix}$

$$|H_A| = \sqrt{12} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2/\sqrt{12} & 0 \\ 1 & 0 & -6/\sqrt{12} \end{vmatrix} = 8 > 0$$

αρα στο A τοπικό μέγιστο

Στο B $\quad H_B = \begin{bmatrix} 0 & -\sqrt{12} & -\sqrt{12} \\ -\sqrt{12} & 2/\sqrt{12} & 0 \\ -\sqrt{12} & 0 & 6/\sqrt{12} \end{bmatrix}$

$$|H_B| = (-1)^3 \, |H_A| = -8 \quad < 0$$

αρα στο B τοπικό ελάχιστο

4. Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Να υπολογιστεί η δύναμη A^6.

ιδιοτιμές
$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \rightarrow (3-\lambda)^2 - 1^2 = 0$$

$$\rightarrow (2-\lambda)(4-\lambda) = 0 \rightarrow \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 4$$

ιδιοδιανύσματα
- $\lambda_1 = 2$
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x + y = 0 \rightarrow x = -y \quad \text{αρα} \quad p_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- $\lambda_2 = 4$
$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x - y = 0 \rightarrow x = y \quad \text{αρα} \quad p_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ο πίνακας διαγωνοποιείται καθώς έχει 2 διαφορετικές μεταξύ τους ιδιοτιμές

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}}_{D} \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}}_{P^{-1}}$$

αρα

$$A^6 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^6 & 0 \\ 0 & 4^6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

5. Να υπολογιστεί ο Εσσιανός πίνακας της συνάρτησης $f(x,y) = \ln(xy) - xe^{xy}$

$f \cdot g$

$\cdot\ f_x = \frac{1}{xy} \cdot y - \left(e^{xy} + x \cdot e^{xy} \cdot y\right) = \boxed{\frac{1}{x} - e^{xy} - xy e^{xy}}$

$\cdot\ f_y = \frac{1}{xy} \cdot x - x \cdot e^{xy} \cdot x = \frac{1}{y} - x^2 \cdot e^{xy}$

$(f_x)_x = -\frac{1}{x^2} - e^{xy} \cdot y - \left(y\, e^{xy} + xy\, e^{xy} \cdot y\right)$

$= -\frac{1}{x^2} - 2y e^{xy} - xy^2 e^{xy}$

$(f_x)_y = 0 - e^{xy} \cdot x - \left(x \cdot e^{xy} + xy\, e^{xy} \cdot x\right) = -2x e^{xy} - x^2 y\, e^{xy}$

$(f_y)_y = -\frac{1}{y^2} - x^2 e^{xy} x = -\frac{1}{y^2} - x^3 e^{xy}$

6. Να λυθεί το παραμετρικό γραμμικό σύστημα

$$\lambda . x + y = 1 + \lambda$$
$$x + \lambda . y = 1 + \lambda$$

$$A|b = \left[\begin{array}{cc|c} \lambda & 1 & 1+\lambda \\ 1 & \lambda & 1+\lambda \end{array}\right] \quad \Gamma_1 \leftrightarrow \Gamma_2$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & \lambda & 1+\lambda \\ \lambda & 1 & 1+\lambda \end{array}\right] \quad \Gamma_2 = \Gamma_2 - \lambda\Gamma_1 \quad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \lambda & 1+\lambda \\ 0 & 1-\lambda^2 & {}^{*}\ 1-\lambda^2 \end{array}\right]$$

$* \ 1+\lambda-\lambda(1+\lambda)$

$(1+\lambda)(1-\lambda) = 1-\lambda^2$

- $\lambda = 1$

  rankA = rank $(A|b) = 1 < n = 2$ απειρες

- $\lambda = -1$

  rankA = rank $(A|b) = 1 < n = 2$ απειρες

- $\lambda \neq \pm 1$

  rankA = rank $(A|b) = 2 = n$ Μον. Λυση

$(1-\lambda^2)y = (1-\lambda^2) \longrightarrow y = 1$

$x + \lambda y = 1+\lambda \xrightarrow{y=1}$

$x + \lambda = 1+\lambda \longrightarrow x = 1$

7. Να υπολογιστεί η ευθεία ελαχίστων τετραγώνων που να παρεμβάλει τα σημεία (0,0), (1,1),(1,-3).

Μεθοδος ελαχίστων τετραγώνων

$$F(a,b) = \sum (a + bx - y)^2 =$$

$$= a^2 + (a+b-1)^2 + (a+b+3)^2$$

f-υ-ι- $\left.\begin{array}{l} F_a = 0 \quad \ldots \\ F_b = 0 \quad \ldots \end{array}\right\} a = 0, \; b = -1$

αρα ευθεία παλινδρόμησης $y = -x$