

Θέμα 1ο: Α) (1 μονάδα) Να βρείτε το ανοικτό διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{\sqrt{n}} \cdot x^n$.

οι φη $a_n = \frac{3^n}{\sqrt{n}} \cdot x^n$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{3^n}{\sqrt{n}} \cdot x^n} = \frac{3}{1} |x| = 3|x|$$

Πριτι $3|x| < 1 \rightarrow |x| < \frac{1}{3}$

$(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ διαστημα σε μωδεις

Β) (1 μονάδα) Μια πίτσα μοιράζεται έτσι ώστε κάθε άτομο παίρνει το μισό από ό,τι απομένει. Το πρώτο άτομο παίρνει $\frac{1}{2}$ της όλης πίτσας, το δεύτερο παίρνει $\frac{1}{4}$, το τρίτο $\frac{1}{8}$, και ούτω καθεξής.

1. Δείξτε ότι αυτή η ακολουθία κλασμάτων είναι γεωμετρική πρόοδος. Ποιο κλάσμα της πίτσας παίρνει το n -οστό άτομο;
2. Βρείτε το συνολικό κλάσμα της πίτσας που θα ληφθεί αν αυτή η διαδικασία συνεχίζεται επ' άπειρον.

1) Οροι $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = (\frac{1}{2})^1 + (\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^3 + \dots$

αρι παλι ορι προκυπτει απο τον προηγουμενο
αν το πληθυνσιασιν επι $\frac{1}{2}$ αρι

γεωμετρική προοδος με $\lambda = 1/2$

Αρι το n -οστο ατομο παρνει $(\frac{1}{2})^n$

2) Αν η διαδικασία συνεχιστεί εν άπειρο
θα γυρνάει ο λογαριθμός η πηγή
αρα το συνολικό κλάσμα είναι 1

$$\text{Έχω } \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1-1/2} = 2$$

$$\text{αρα } 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 2$$

$$\text{Συνολικά } \boxed{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 1}$$

Θέμα 2ο: Α) (1.5 μονάδες) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 5x + 4} dx$.

$$\text{ζητώντας } x^2 - 5x + 6 \rightarrow \Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 1$$

$$\text{αρα } x_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{2} \quad \begin{array}{l} 3 \\ -2 \end{array}$$

$$x^2 - 5x + 6 = (x-3)(x-2)$$

$$\text{ζητώντας } x^2 - 5x + 4 \rightarrow \Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 9$$

$$\text{αρα } x_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{2} \quad \begin{array}{l} 4 \\ -1 \end{array}$$

$$x^2 - 5x + 4 = (x-4)(x-1)$$

$$\int \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 5x + 4} dx = \int \frac{x^2 - 5x + 4 \overset{\downarrow}{+} 2}{x^2 - 5x + 4} dx =$$

$$\int \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 5x + 4} dx + \int \frac{2}{x^2 - 5x + 4} dx =$$

$$\int 1 dx + \int \frac{2}{x^2 - 5x + 4} dx =$$

$$= x + 2 \cdot \int \frac{1}{(x-4)(x-1)} dx \quad \textcircled{1}$$

Ανάλυση σε απλά κλάσματα

$$\frac{1}{(x-4)(x-1)} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x-1} \quad \xrightarrow{\text{εν } (x-4)/(x-1)}$$

$$1 = A(x-1) + B(x-4)$$

$$\bullet x=1 \rightarrow 1 = -3B \rightarrow B = -1/3$$

$$\bullet x=4 \rightarrow 1 = 3A \rightarrow A = 1/3$$

$$\textcircled{1} \rightarrow x + 2 \cdot \left(\int \frac{1/3}{x-4} dx + \int \frac{-1/3}{x-1} dx \right)$$

$$\text{Τελικά } I = x + \frac{2}{3} \ln|x-4| - \frac{2}{3} \ln|x-1| + C$$

B) (1.5 μονάδες) Να βρεθεί η εφαπτόμενη ευθεία της $f(x) = x^x$, $x > 0$, στο σημείο $(1, 1)$.

Εφαπτομένη στο x_0 : $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

στο $x = 1$: $y - 1 = f'(1) \cdot (x - 1)$ ①

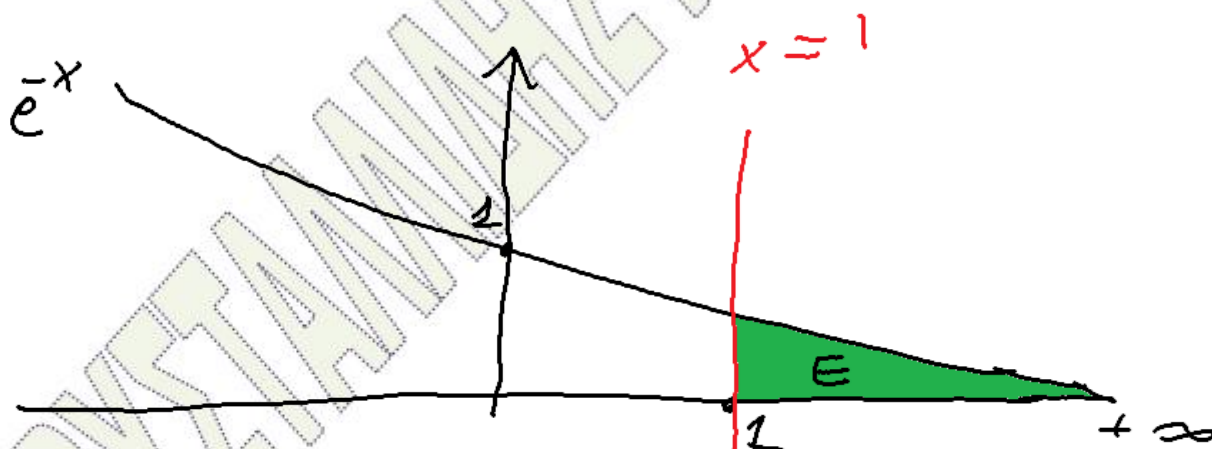
$$f'(x) = (x^x)' = (e^{x \ln x})' = e^{x \ln x} \cdot (x \ln x)' = x^x \cdot (\ln x + 1) \text{ άρα } f'(1) = 1^1 \cdot (\ln 1 + 1) = 1$$

① εφαπτομένη $y - 1 = 1 \cdot (x - 1) \rightarrow \boxed{y = x}$

extra κλίση ευθεία

$$y - 1 = -\frac{1}{1} (x - 1) \rightarrow \boxed{y = -x + 2}$$

Θέμα 3ο: A) (1.5 μονάδες) Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περιορίζεται από τις γραφικές παραστάσεις των σχέσεων $y = e^{-x}$, $x = 1$ και του θετικού ημιάξονα Ox , για $x \geq 1$.



$$E = \int_1^{\infty} e^{-x} dx = \left[\frac{e^{-x}}{-1} \right]_1^{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} -e^{-x} - (-e^{-1}) = e^{-1}$$

B) (1.5 μονάδες) Αν η συνάρτηση του οριακού κόστους μιας επιχείρησης είναι $MC(q) = -\frac{81}{q^2} + \frac{1}{3}$, και η συνάρτηση του συνολικού κόστους έχει ελάχιστη τιμή 10 νομισματικών μονάδων, να βρεθεί η συνάρτηση του συνολικού κόστους $C(q)$.

$$\begin{aligned} TC &= \int MC dq + FC \rightarrow TC = \int -\frac{81}{q^2} + \frac{1}{3} dq + FC \\ &= -81 \cdot \int q^{-2} dq + \frac{1}{3} \int 1 dq + FC \\ &= -81 \cdot \frac{q^{-1}}{-1} + \frac{1}{3} \cdot q + FC = \boxed{\frac{81}{q} + \frac{1}{3}q + FC} \end{aligned}$$

Ελάχιστη τιμή **10 ν.μ.**

$$\begin{aligned} \text{f.o.c. } TC' &= 0 \rightarrow -\frac{81}{q^2} + \frac{1}{3} = 0 \\ \rightarrow \frac{81}{q^2} &= \frac{1}{3} \rightarrow q^2 = 243 \rightarrow q = \sqrt{243} \\ TC(\sqrt{243}) &= 10 \rightarrow \frac{81}{\sqrt{243}} + \frac{1}{3} \sqrt{243} + FC = 10 \\ \rightarrow FC &= -0,392 \end{aligned}$$

Θέμα 4ο: (2 μονάδες) Μια επιχείρηση παράγει ένα προϊόν του οποίου η συνάρτηση ζήτησης είναι $P_d(q) = -\frac{2}{3}q^2 - 8q + 3018$, και η συνάρτηση συνολικού κόστους είναι $TC(q) = 2q^2 + 180q + 3000$. Η τιμή του προϊόντος μετριέται σε ευρώ και η ποσότητα q σε τόνους. Ζητούνται:

1. Να βρεθεί ο αριθμός μονάδων προϊόντος και η τιμή μονάδας που μεγιστοποιούν το κέρδος $\Pi(q)$.
2. Να βρεθεί το πλεόνασμα του καταναλωτή όταν το προϊόν πωλείται στην τιμή ισορροπίας.

$$\begin{aligned} 1) \quad \Pi(q) &= TR - TC \\ \Pi &= P \cdot q - TC = (-\frac{2}{3}q^2 - 8q + 3018) \cdot q - (2q^2 + 180q + 3000) \\ \Pi &= -\frac{2}{3}q^3 - 8q^2 + 3018q - 2q^2 - 180q - 3000 \\ \Pi &= -\frac{2}{3}q^3 - 10q^2 + 2838q - 3000 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f.o.c. } \Pi' &= 0 \rightarrow -2q^2 - 20q + 2838 = 0 \\ &\xrightarrow{\text{δια } -2} q^2 + 10q - 1419 = 0 \\ \Delta &= 10^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1419) = 5776 \\ q_{1,2} &= \frac{-10 \pm \sqrt{5776}}{2} = \frac{-10 \pm 76}{2} \begin{cases} 33 \\ -43 \text{ απορ.} \end{cases} \end{aligned}$$

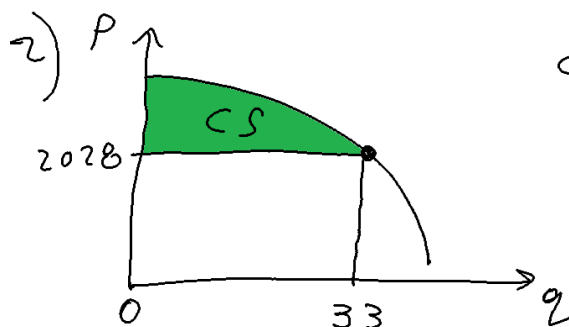
$$S.O.C. \quad \pi'' = -4q - 20$$

$$\pi''(33) = -4 \cdot 33 - 20 < 0 \text{ αρα τιφισο}$$

Αρα το μικρότερο τιφισοποιείται για $q=33$ τμ.

και η τιμή ισορροπίας είναι

$$P = -\frac{2}{3} \cdot 33^2 - 8 \cdot 33 + 3018 = 2028 \text{ €}$$



$$\begin{aligned} CS &= \int_0^{33} \left(-\frac{2}{3}q^2 - 8q + 3018 \right) dq - 2028 \cdot 33 \\ &= \left[-\frac{2}{3} \frac{q^3}{3} - 8 \frac{q^2}{2} + 3018q \right]_0^{33} - 66924 \\ &= \left[-\frac{2}{9}q^3 - 4q^2 + 3018q \right]_0^{33} - 66924 \end{aligned}$$

$$= -\frac{2}{9} \cdot 33^3 - 4 \cdot 33^2 + 3018 \cdot 33 - (0 + 0 + 0) - 66924 = 20328$$

Αυτές οι λύσεις των θεμάτων αναρτήθηκαν στο facebook γκρούπ του Οικονομικού ΕΚΠΑ, όπου λύνουμε με τους συνεργάτες μου απορίες στους φοιτητές της σχολής και διοργανώνονται τα ΔΩΡΕΑΝ επαναληπτικά meetings, όπου μπορούν να συμμετέχουν όλοι οι φοιτητές, στις εξεταστικές.

Ενημέρωσε τους συμφοιτητές σου για την ύπαρξη του facebook γκρουπ της σχολής που συμμετέχουν 1500 μέλη φοιτητές, που έχει όνομα : **ΕΚΠΑ Τμήμα Οικονομικών Επιστημών (Όλοι οι φοιτητές της σχολής εδώ)**

Γκρουπ LINK → <https://www.facebook.com/groups/oikonomiko.nomikhs/>

DM «ΤΟΕ» Instagram Γκρούπ → <https://www.instagram.com/foitites.oikonomikou/>

ΘΕΙΟΣ ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ – 31/5/2026