

# Μαθηματικά 1 – Κατσίκης - 2024 Σεπτέμβριος

**Θέμα 1ο:** Η συνάρτηση ζήτησης ενός προϊόντος είναι  $Q = -4P + 5$ . Να υπολογισθεί η ελαστικότητα της ζήτησης ως προς την τιμή, όταν  $P = 1$ . Χρησιμοποιώντας αυτό το αποτέλεσμα, να υπολογισθεί η ποσοστιαία μεταβολή στη ζητούμενη ποσότητα, αν η τρέχουσα τιμή  $P = 1$  αυξηθεί κατά 2%.

$$\text{Όταν } P=1 \text{ τότε } Q = -4 \cdot 1 + 5 \rightarrow Q = 1$$

$$\varepsilon_D = \frac{dQ}{dP} \cdot \frac{P}{Q} = (-4P + 5)' = \frac{P}{Q} = -4 \cdot \frac{1}{1} = -4$$

$$|\varepsilon_D| = 4 > 1 \text{ ελαστική ζήτηση}$$

$$\varepsilon_D = \frac{\text{ποσοστιαία μεταβολή ποσότητας}}{\text{ποσοστιαία μεταβολή τιμής}}$$

$$-4 = \frac{\% \Delta Q}{+2\%} \rightarrow \% \Delta Q = -8\%$$

η ποσότητα θα μειωθεί κατά 8%

**Θέμα 2ο:** Μια συνάρτηση ολικού κόστους έχει τύπο:  $TC = 125 - 4Q + \frac{Q^3}{16}$ .

Α) Να μελετηθεί πλήρως η  $TC$  (πεδίο ορισμού, μονοτονία, κυρτότητα, ακρότητα).

Β) Να βρεθούν τα σημεία στα οποία παρουσιάζουν ακρότητα οι συναρτήσεις οριακού και μέσου κόστους καθώς και το είδος τους.

Γ) Αν υπάρχει κρατική επιχορήγηση ύψους 3 χρηματικών μονάδων, ανά παραγόμενη μονάδα, να βρεθεί για ποια τιμή του  $Q$  ελαχιστοποιείται το συνολικό κόστος με την επιχορήγηση.

A) Πρέπει  $Q > 0$

$$\text{f.o.c. } TC' = 0 \rightarrow -4 + \frac{3Q^2}{16} = 0 \rightarrow \frac{3Q^2}{16} = 4$$

$$\rightarrow Q^2 = \frac{64}{3} \rightarrow Q = \frac{8}{\sqrt{3}}$$

το αρνητικό  $Q$  απορρίπτεται, άρα

$$\text{Μοναδικό κρίσιμο } Q^* = \frac{8}{\sqrt{3}}$$

$$\text{S.o.c. } TC'' = \left(-4 + \frac{3Q^2}{16}\right)' = \frac{3Q}{8}$$

$$TC''\left(\frac{8}{\sqrt{3}}\right) = \frac{3}{8} \cdot \frac{8}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} > 0 \text{ άρα ελάχιστο}$$

Κυρτότητα

$$\text{Κυρτή όταν } TC'' > 0 \rightarrow \frac{3Q}{8} > 0 \rightarrow Q > 0$$

$$\text{Κοίλη όταν } TC'' < 0 \rightarrow \frac{3Q}{8} < 0 \rightarrow Q < 0 \text{ εκτός Π.Δ.}$$

Σε όλο το πεδίο ορισμού η συνάρτηση είναι κυρτή.

B) Οριακό κόστος  $MC = TC' = -4 + \frac{3Q^2}{16}$

$$\text{f.o.c. } MC' = 0 \rightarrow \frac{3Q}{8} = 0 \rightarrow Q^* = 0 \text{ κρίσιμο}$$

$$\text{S.o.c. } MC'' = \left(\frac{3Q}{8}\right)' = \frac{3}{8} > 0 \text{ άρα ελάχιστο}$$

$$\text{Μεσο Κόστος } ATC = \frac{TC}{Q} = \frac{125 - 4Q + \frac{Q^3}{16}}{Q}$$

$$ATC = \frac{125}{Q} - 4 + \frac{Q^2}{16}$$

$$\text{Α.ο.κ. } ATC' = 0 \rightarrow -\frac{125}{Q^2} + \frac{Q}{8} = 0 \rightarrow$$

$$\frac{Q}{8} = \frac{125}{Q^2} \rightarrow Q^3 = 1000 \rightarrow Q^* = 10$$

$$\text{Β.ο.κ. } ATC'' = \left( -\frac{125}{Q^2} + \frac{Q}{8} \right)' = \frac{250}{Q^3} + \frac{1}{8}$$

$$ATC''(10) = \frac{250}{10^3} + \frac{1}{8} > 0 \text{ αρα ελάχιστο}$$

$$\Gamma) TC = 125 - 4Q + \frac{Q^3}{16} - 3Q = 125 - 7Q + \frac{Q^3}{16}$$

$$f.o.c. \quad TC' = 0 \rightarrow -7 + \frac{3Q^2}{16} = 0 \rightarrow \frac{3Q^2}{16} = 7 \rightarrow$$

$$Q^2 = \frac{112}{3} \rightarrow Q = \pm \sqrt{\frac{112}{3}}$$

απορριπτεται το αρνητικὸ

$$\text{Μοναδική κρίσιμη } Q^* = + \sqrt{\frac{112}{3}}$$

$$f.o.c. \quad TC'' = \left(-7 + \frac{3Q^2}{16}\right)' = \frac{3Q}{8}$$

$$TC''\left(\sqrt{\frac{112}{3}}\right) = \frac{3}{8} \cdot \sqrt{\frac{112}{3}} > 0 \text{ αρα ελαχιστο}$$

**Θέμα 3ο:** Το ολικό κατασκευαστικό κόστος για την παραγωγή  $Q$  μονάδων ενός προϊόντος είναι  $C(Q) = 3Q^2 + 5Q + 75$  ευρώ. Σε ποιο επίπεδο της παραγωγής ελαχιστοποιείται το μέσο κόστος;

$$\text{Μέσο Κόστος } ATC = \frac{TC}{Q} = \frac{3Q^2 + 5Q + 75}{Q}$$

$$\rightarrow ATC = 3Q + 5 + \frac{75}{Q}$$

$$f.o.c. \quad ATC' = 0 \rightarrow 3 - \frac{75}{Q^2} = 0 \rightarrow \frac{75}{Q^2} = 3$$

$$\rightarrow Q^2 = \frac{75}{3} \rightarrow Q^2 = 25 \rightarrow Q = \pm 5$$

το αρνητικό απορριπτεται αρα  $Q^* = 5$

$$\text{Σ.Ο.Σ.} \quad \text{ATC}'' = \left( 3 - \frac{75}{Q^2} \right)' = \frac{150}{Q^3}$$

$$\text{ATC}''(5) = \frac{150}{5^3} > 0 \text{ άρα ελαχιστο}$$

**Θέμα 4ο:** Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:  $\int_{-1}^1 \frac{2+3x}{9-x^2} dx$ .

$$\int_{-1}^1 \frac{2+3x}{3^2-x^2} dx = \int_{-1}^1 \frac{2+3x}{(3-x)(3+x)} dx$$

Αναλυση σε απλα κλασματα

$$\frac{2+3x}{(3-x)(3+x)} = \frac{A}{3-x} + \frac{B}{3+x} \quad \xrightarrow{(\cdot) (3-x)(3+x)}$$

$$2+3x = A(3+x) + B(3-x)$$

$$\bullet x = -3 \rightarrow 2+3(-3) = A \cdot 0 + B \cdot 6$$

$$-7 = 6B \rightarrow \boxed{B = -\frac{7}{6}}$$

$$\bullet x=3 \rightarrow 2+3 \cdot 3 = 6A + 0 \cdot B$$

$$11 = 6A \rightarrow \boxed{A = \frac{11}{6}}$$

$$\text{αρα } I = \int_{-1}^1 \frac{11/6}{3-x} + \frac{-7/6}{3+x} dx =$$

$$\frac{11}{6} \ln|3-x| \Big|_{-1}^1 - \frac{7}{6} \ln|3+x| \Big|_{-1}^1$$

$$\frac{11}{6} \cdot (\ln(3-1) - \ln(3-(-1))) - \frac{7}{6} (\ln(3+1) - \ln(3-1))$$

$$\frac{11}{6} (\ln 2 - \ln 4) - \frac{7}{6} (\ln 4 - \ln 2)$$

$$3 \ln 2 - 3 \ln 4 = 3 (\ln 2 - \ln 4) = \boxed{3 \ln \left( \frac{2}{4} \right)}$$

**Θέμα 5ο:** Να εξετάσει ως προς τη σύγκλιση το ολοκλήρωμα:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} dx.$$

Η προς ολοκλήρωση συνάρτηση είναι περιττή δηλαδή  $f(-x) = -f(x)$   
 άρα το ολοκλήρωμα της σε συμμετρικο διάστημα ισούται με μηδέν

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} dx = 0$$