

ΤΟΕ Μαθηματικά 1 – 2022 Φεβρουάριος Μελάς

Θέμα 1^ο (2 μονάδες)

Α) Αποδείξτε ότι οι ευθείες που εφάπτονται στις καμπύλες $5y - 2x + y^3 - x^2y = 0$, $2y + 5x + x^4 - x^3y^2 = 0$ είναι κάθετες στο σημείο $(0,0)$. (1 μονάδα)

① παραγωγίζω $5y' - 2 + 3y^2y' - (2xy + x^2y') = 0$

$$\begin{aligned} \frac{x=0}{y=0} \rightarrow 5y' - 2 + 3 \cdot 0^2 y' - 2 \cdot 0 \cdot 0 + 0 \cdot y' &= 0 \\ 5y' - 2 &= 0 \rightarrow y'(0) = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

② παραγωγίζω $2y' + 5 + 4x^3 - (2xy^2 + 2x^3y \cdot y') = 0$

$$\frac{x=0}{y=0} \rightarrow 2y' + 5 = 0 \rightarrow y'(0) = -\frac{5}{2}$$

καθετες όταν το γινόμενο των κλίσεων είναι -1

$$\frac{2}{5} \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) = -1 \text{ και οκ}$$

Β) Με τη βοήθεια διαφορικού προσεγγίστε τον αριθμό $\sqrt[3]{124}$. (1

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt[3]{x} = x^{1/3} \\ x_0 &= 125 \\ \Delta x &= -1 \end{aligned}$$

$$\sqrt[3]{124} = f(125 - 1) \approx f(125) + f'(125) \cdot (-1) \quad \text{①}$$

$$f(125) = \sqrt[3]{125} = 5$$

$$f'(x) = (x^{1/3})' = \frac{1}{3} x^{-2/3} = \frac{1}{3(\sqrt[3]{x})^2} \rightarrow f'(125) = \frac{1}{3 \cdot 5^2} = \frac{1}{75}$$

$$\text{① } \sqrt[3]{124} = 5 + \frac{1}{75}(-1) = \frac{375 - 1}{75} = \frac{374}{75}$$

Θέμα 2^ο (2 μονάδες)

A) Υπολογίστε τα ολοκληρώματα $\int \frac{x+3}{\sqrt{1-x^2}} dx$, $\int \frac{x}{x^2+3} dx$.

$$\int \frac{x+3}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx + \int \frac{3}{\sqrt{1-x^2}}$$


 Θεω
 $u = 1 - x^2$


$$\int \frac{x}{x^2+3} dx$$

Θεω $u = x^2 + 3$
 $du = 2x dx$
 $dx = \frac{du}{2x}$

$$I = \int \frac{x}{u} \cdot \frac{du}{2x} = \frac{1}{2} \ln u = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 3) + C$$

B) Υπολογίστε τα ολοκληρώματα $\int x \ln x dx$, $\int x^{100} \ln x dx$.

$$\int x \ln x dx = \int x' \cdot \ln x dx \stackrel{\text{παραγοντική}}{=} x \cdot \ln x + \int \frac{x}{x^2+1}$$


 Θεω
 $u = x^2 + 1$

$$\int x^c \cdot \ln x \, dx, \quad \forall c$$

$$= \int \left(\frac{x^{c+1}}{c+1} \right)' \cdot \ln x \, dx \quad \underline{\underline{\text{παραγοντική}}}$$

$$= \frac{x^{c+1}}{c+1} \cdot \ln x + \int \frac{x^{c+1}}{c+1} \cdot \frac{1}{x} \, dx =$$

$$= \frac{x^{c+1}}{c+1} \cdot \ln x + \frac{1}{c+1} \int x^c \, dx =$$

$$= \frac{x^{c+1}}{c+1} \cdot \ln x + \frac{1}{c+1} \cdot \frac{x^{c+1}}{c+1} + C$$

Θέμα 3^ο (2 μονάδες)

A) Υπολογίστε τα ολοκληρώματα $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} \, dx$, $\int \frac{x+2}{x+1} \, dx$.

$$\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} \, dx$$

$$\text{Θετίζω } u = \frac{1}{x}$$

$$du = -\frac{1}{x^2} \, dx$$

$$dx = -x^2 \, du$$

$$I = \int \frac{e^u}{x^2} (-x^2 \, du)$$

$$= - \int e^u \, du = -e^u$$

$$= -e^{\frac{1}{x}} + C$$

$$\int \frac{x+2}{x+1} dx = \int \frac{x+1+1}{x+1} dx =$$

$$\int 1 dx + \int \frac{1}{x+1} dx = x + \ln|x+1| + c$$

B) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int \frac{x+1}{x^3-x^2} dx$.

$$\int \frac{x+1}{x^2(x-1)} \quad \text{συνελώνω σε κλάσματα}$$

$$\frac{x+1}{x^2(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{\Gamma}{x-1}$$

$$x+1 = A x(x-1) + B(x-1) + \Gamma x^2$$

$$\cdot x=0 \quad 1 = -B \rightarrow B = -1$$

$$\cdot x=1 \quad 2 = \Gamma$$

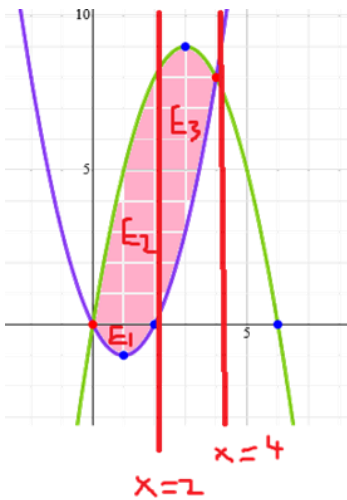
$$\cdot x=2 \quad 3 = 2A + B + 4\Gamma \rightarrow A = -2$$

$$I = \int \frac{-2}{x} dx + \int \frac{-1}{x^2} dx + \int \frac{2}{x-1} dx$$

$$-2 \ln|x| + \frac{1}{x} + 2 \ln|x-1| + c$$

Θέμα 4^ο (2 μονάδες)

A) Βρείτε το εμβαδό της περιοχής που περικλείεται μεταξύ των παραβολών $y = 6x - x^2$, $y = x^2 - 2x$. (1 μονάδα)



Αρχικά βρίσκουμε τα σημεία τομής των 2 καμπυλών :

$$6x - x^2 = x^2 - 2x$$

$$2x^2 - 8x = 0 \rightarrow 2x \cdot (x - 4) = 0$$

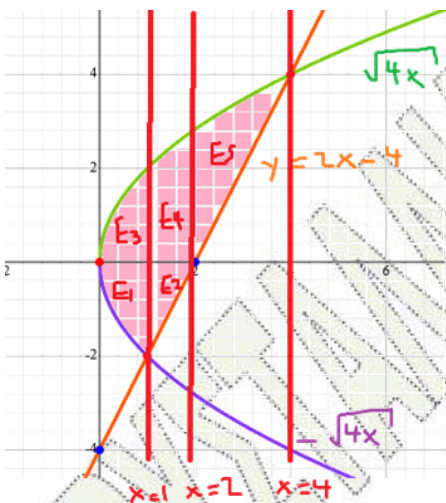
$$\text{αρα } x = 0 \text{ και } x = 4$$

Το ζητούμενο εμβαδό E είναι η ροζ περιοχή στο σχήμα

$$E = - \int_0^2 x^2 - 2x dx + \int_0^2 6x - x^2 dx + \int_2^4 6x - x^2 - (x^2 - 2x) dx$$

$E_1 + E_2 + E_3$

B) Βρείτε το εμβαδό που περικλείεται μεταξύ της παραβολής $y^2 = 4x$ και της γραμμής $y = 2x - 4$. (1 μονάδα)



Αρχικά βρίσκουμε τα σημεία τομής των 2 καμπυλών

$$4x = (2x - 4)^2 \rightarrow x = 1 \text{ και } x = 4$$

Η ευθεία $y = 2x - 4$ τέμνει τον y' στο $x = 2$

$$E = - \int_0^1 -\sqrt{4x} - \int_1^2 2x - 4 + \int_0^2 \sqrt{4x} + \int_2^4 \sqrt{4x} - (2x - 4)$$

$E_1 + E_2 + (E_3 + E_4) + E_5$

Τελικό αποτέλεσμα E=9

Θέμα 5^ο (2 μονάδες)

A) Βρείτε τη σειρά MacLaurin της συνάρτησης $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$. (1 μονάδα)

$$f(x) = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}), \quad x_0 = 0$$

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} x^3 + \dots \quad (1)$$

$$f(0) = \frac{1}{2} (e^0 + e^0) = 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} (e^x - e^{-x}) \rightarrow f'(0) = \frac{1}{2} (1 - 1) = 0$$

$$f''(x) = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}) \rightarrow f''(0) = \frac{1}{2} (1 + 1) = 1$$

$$f'''(0) = 0, \quad f^{(4)}(0) = 1, \quad f^{(5)}(0) = 0, \dots$$

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + \frac{0}{1!} x + \frac{1}{2!} x^2 + \frac{0}{3!} x^3 + \frac{1}{4!} x^4 + \dots \\ &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \end{aligned}$$

B) Βρείτε το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς $x - 2 + \frac{(x-2)^2}{2} + \frac{(x-2)^3}{3} + \dots + \frac{(x-2)^n}{n} + \dots$ (1 μονάδα)

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n} \quad \text{αρα} \quad a_n = \frac{(x-2)^n}{n}$$

Κριτήριο λόγου

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{\frac{(x-2)^{n+1}}{n+1}}{\frac{(x-2)^n}{n}} \right| = \left| \frac{(x-2)^{n+1} \cdot n}{(x-2)^n (n+1)} \right| = |x-2| \frac{n}{n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x-2| \frac{n}{n+1} = |x-2| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = |x-2| < 1$$

$$-1 < x-2 < 1 \rightarrow 1 < x < 3$$

Διάστημα $x \in (1, 3)$

Ακτίνα $\rho = 1$

Θέμα 6^ο (2 μονάδες)

A) Βρείτε τη σειρά *MacLaurin* της συνάρτησης $\ln(x+1)$.

$$f(x) = \ln(x+1) \quad , \quad x_0 = 0$$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}x + \frac{f''(x_0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}x^3 + \dots \quad (1)$$

$$f(x_0) = \ln(0+1) = \ln 1 = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} \cdot 1 \rightarrow f'(x_0) = \frac{1}{0+1} = 1$$

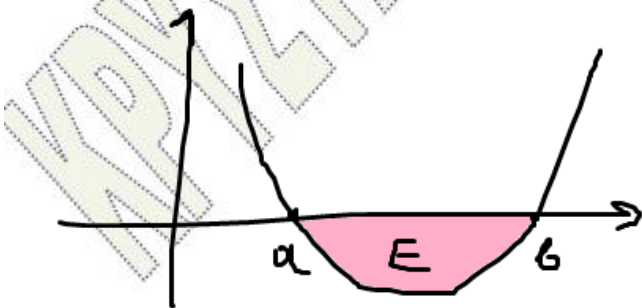
$$f''(x) = \left((x+1)^{-1} \right)' = - (x+1)^{-2} \rightarrow f''(x_0) = -1$$

$$f'''(x) = \left(- (x+1)^{-2} \right)' = 2 (x+1)^{-3} \rightarrow f'''(x_0) = 2$$

$$(1) \rightarrow f(x) = 0 + \frac{1}{1!}x + \frac{-1}{2!}x^2 + \frac{2}{3!}x^3 + \dots$$

B) Να βρείτε το εμβαδό που περικλείεται μεταξύ της συνάρτησης $f(y) = (y-a)(y-b)$ και του άξονα των y . (1 μονάδα)

$$f(x) = (x-a)(x-b) \quad a < 0 < b < x$$



$$E = - \int_a^b (x-a)(x-b) dx = \dots$$