

MSc Applied Mathematician NTUA , MSc in Finance NKUA

ΘΕΜΑ 1

Μία μετοχή έχει τρέχουσα τιμή $S_0 = 50$ ευρώ. Σε κάθε ένα από τα επόμενα δύο εξάμηνα, η τιμή της μετοχής αναμένεται να αυξηθεί κατά 20% ή να μειωθεί κατά 20%. Το ετήσιο επιτόκιο άνευ κινδύνου είναι 5% με συνεχή ανατοκισμό.

α) Ποια είναι η αξία ενός ευρωπαϊκού δικαιώματος πώλησης με τιμή εξάσκησης $X = 52$ και διάρκεια ένα έτος;

β) Ποια είναι η αξία ενός αμερικανικού δικαιώματος πώλησης με τιμή εξάσκησης $X = 52$ και διάρκεια ένα έτος;

γ) Γιατί μπορεί να διαφέρουν οι τιμές μεταξύ ευρωπαϊκών και αμερικανικών δικαιωμάτων;

$$\text{Δίνεται: } p = \frac{e^{rT} - d}{u - d}$$

Απάντηση :

$$\text{Δεδομένα: } S_0 = 50, X = 52, u = 1.2, d = 0.8, r = 0.05, \Delta t = \frac{6}{12}$$

Έχουμε δέντρο 2 περιόδων, αφού η συνολική διάρκεια είναι 1 έτος και υπάρχουν δύο εξάμηνα βήματα.

Βήμα 1: Τιμές της μετοχής στο δέντρο

$$S_u = 1.2 \cdot 50 = 60$$

$$S_d = 0.8 \cdot 50 = 40$$

$$S_{uu} = 1.2^2 \cdot 50 = 72$$

$$S_{ud} = 1.2 \cdot 0.8 \cdot 50 = 48$$

$$S_{dd} = 0.8^2 \cdot 50 = 32$$

Βήμα 2: Risk-neutral probability

$$p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d} = 0,5633$$

α) Ευρωπαϊκό put

Βήμα 3: Payoffs στη λήξη

$$f_{uu} = 0$$

$$f_{ud} = 4$$

$$f_{dd} = 20$$

Βήμα 4: Τιμές στους ενδιάμεσους κόμβους ευρωπαϊκού τύπου

Στον άνω ενδιάμεσο κόμβο: $f_u = e^{-r\Delta t}(pf_{uu} + (1-p)f_{ud}) = 1,7037$

Στον κάτω ενδιάμεσο κόμβο: $f_d = e^{-r\Delta t}(pf_{ud} + (1-p)f_{dd}) = 10,7159$

Βήμα 5: Τιμή σήμερα ευρωπαϊκού τύπου

$$f_0 = e^{-r\Delta t}(pf_u + (1-p)f_d) = 5,50$$

β) Αμερικανικό put

Στα τελικά άκρα της λήξης οι τιμές είναι ίδιες με του ευρωπαϊκού:

$$f_{uu} = 0, f_{ud} = 4, f_{dd} = 20$$

Τώρα, σε κάθε ενδιάμεσο κόμβο συγκρίνουμε:

- την αξία ευρωπαϊκού τύπου
- την αξία άμεσης εξάσκησης

Στον άνω ενδιάμεσο κόμβο

Η αξία ευρωπαϊκού τύπου είναι αυτή που ήδη βρήκαμε:

$$f_u^{(Eur)} = 1.7037$$

$$\text{Αξία άμεσης εξάσκησης} = \max(52 - 60, 0) = 0$$

Άρα η τιμή του αμερικανικού put στον άνω κόμβο είναι:

$$f_u^{(Am)} = \max(1.7037, 0) = 1.7037$$

Στον κάτω ενδιάμεσο κόμβο Η αξία ευρωπαϊκού τύπου είναι:

$$f_d^{(Eur)} = 10.7159$$

$$\text{Αξία άμεσης εξάσκησης} = \max(52 - 40, 0) = 12$$

Άρα η τιμή του αμερικανικού put στον κάτω κόμβο είναι:

$$f_d^{(Am)} = \max(10.7159, 12) = 12$$

Βήμα 6: Τιμή σήμερα αμερικανικού τύπου

$$f_0^{\square} = e^{-r\Delta t} (p f_u^{(Am)} + (1-p) f_d^{(Am)}) = 6,0469$$

$$\text{Αξία άμεσης εξάσκησης} = \max(52 - 50, 0) = 2$$

Άρα η σημερινή τιμή του αμερικανικού put είναι:

$$f_0^{(Am)} = \max(6.0469, 2) = 6.0469$$

γ) Γιατί μπορεί να διαφέρουν οι τιμές μεταξύ ευρωπαϊκών και αμερικανικών δικαιωμάτων;

Οι τιμές μπορεί να διαφέρουν επειδή το αμερικανικό δικαίωμα δίνει στον κάτοχό του τη δυνατότητα πρόωρης άσκησης, ενώ το ευρωπαϊκό μπορεί να ασκηθεί μόνο στη λήξη.

Άρα το αμερικανικό όρτιον αξίζει τουλάχιστον όσο το αντίστοιχο ευρωπαϊκό.

ΘΕΜΑ-2

Έστω ότι η τρέχουσα τιμή μιας μετοχής είναι 100€ και αποφασίζετε να πραγματοποιήσετε την ακόλουθη στρατηγική : Πώληση ενός δικαιώματος αγοράς με τιμή 3€ και τιμή εξάσκησης 110€, αγορά ενός δικαιώματος αγοράς με τιμή 1€ και τιμή εξάσκησης 115€, πώληση ενός δικαιώματος πώλησης με τιμή 2,50€ και τιμή εξάσκησης 90€ και αγορά ενός δικαιώματος πώλησης με τιμή 1€ και τιμή εξάσκησης 85€. (α) Κατασκευάστε έναν πίνακα με τις καθαρές χρηματοροές της στρατηγικής όταν η τιμή του υποκείμενου τίτλου ισούται με 80€, 85€, 90€, 95€, 100€, 105€, 110€, 115€ και 120€. (β) Υπολογίστε το μέγιστο κέρδος, τη μέγιστη ζημιά και τα νεκρά σημεία της στρατηγικής. (γ) Σχεδιάστε ένα διάγραμμα που να δείχνει τη συνάρτηση απολαβής της στρατηγικής

Απάντηση:

Καθαρό αρχικό premium

Από τις πωλήσεις εισπράττουμε: $3 + 2,50 = 5,50$

Από τις αγορές πληρώνουμε $1 + 1 = 2$

Άρα το καθαρό αρχικό έσοδο είναι: $5,50 - 2 = 3,50$

(α) Πίνακας καθαρών χρηματοροών

Θα γράψουμε πρώτα τα payoff των 4 θέσεων:

Short Call $K = 110$

$$-\max(S_T - 110, 0)$$

Long Call $K = 115$

$$\max(S_T - 115, 0)$$

Short Put $K = 90$

$$-\max(90 - S_T, 0)$$

Long Put $K = 85$

$$\max(85 - S_T, 0)$$

Τιμή στην λήξη $S_T = 80$

Short Call = 0

Long Call = 0

Short Put = -10

Long Put = 5

Συνολικό payoff $0 + 0 - 10 + 5 = -5$

Συνολικό profit $-5 + 3,50 = -1,50$

Τιμή στην λήξη $S_T = 85$

Short Call = 0

Long Call = 0

Short Put = -5

Long Put = 0

Συνολικό payoff $0 + 0 - 5 + 0 = -5$

Συνολικό profit $-5 + 3,50 = -1,50$

Τιμή στην λήξη $S_T = 90$

Short Call = 0

Long Call = 0

Short Put = 0

Long Put = 0

Συνολικό payoff 0

Συνολικό profit $0 + 3,50 = 3,50$

Πρακτικά δεν ασκείται κανένα δικαίωμα άρα έχουμε μόνο το +3,5 των αγοραπωλησιών

Τιμή στην λήξη $S_T = 95$

Short Call = 0

Long Call = 0

Short Put = 0

Long Put = 0

Συνολικό payoff 0

Συνολικό profit 3,50 (ομοίως δεν ασκείται κανένα δικαίωμα)

Τιμή στην λήξη $S_T = 100$

Short Call = 0

Long Call = 0

Short Put = 0

Long Put = 0

Συνολικό profit 3,50 (ομοίως δεν ασκείται κανένα δικαίωμα)

Τιμή στην λήξη $S_T = 105$

Short Call = 0

Long Call = 0

Short Put = 0

Long Put = 0

Συνολικό payoff 0

Συνολικό profit 3,50 (ομοίως δεν ασκείται κανένα δικαίωμα)

Τιμή στην λήξη $S_T = 110$

Short Call = 0

Long Call = 0

Short Put = 0

Long Put = 0

Συνολικό payoff 0

Συνολικό profit 3,50 (ομοίως δεν ασκείται κανένα δικαίωμα)

Τιμή στην λήξη $S_T = 115$

Short Call = -5

Long Call = 0

Short Put = 0

Long Put = 0

Συνολικό payoff -5

Συνολικό profit $-5 + 3,50 = -1,50$

Τιμή στην λήξη $S_T = 120$

Short Call = -10

Long Call = 5

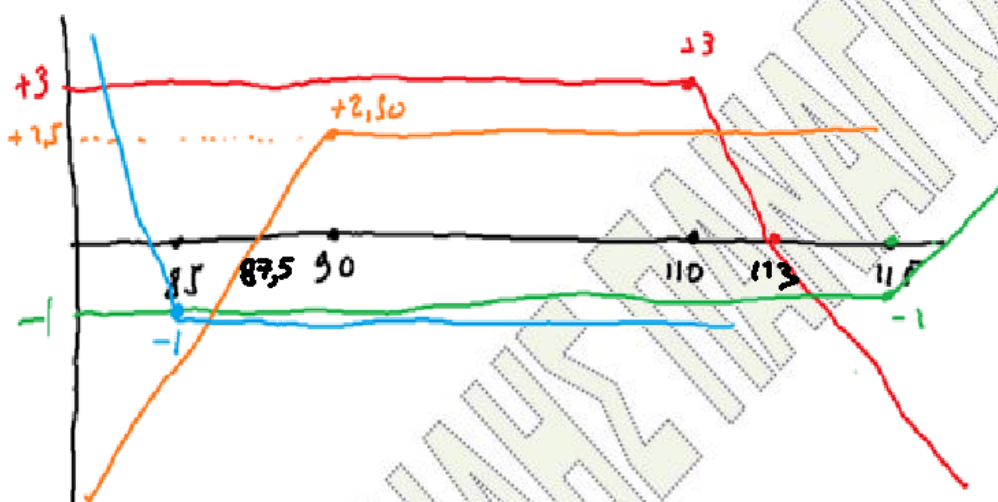
Short Put = 0

Long Put = 0

Συνολικό payoff $-10 + 5 = -5$

Συνολικό profit $-5 + 3,50 = -1,50$

(S_T)	Συνολικό Profit
80	-1,50
85	-1,50
90	+3,50
95	+3,50
100	+3,50
105	+3,50
110	+3,50
115	-1,50
120	-1,50



Β) **Μέγιστο κέρδος** Το μέγιστο κέρδος εμφανίζεται όταν όλα τα δικαιώματα λήγουν χωρίς αξία, δηλαδή όταν: $90 \leq S_T \leq 110$

Τότε το συνολικό payoff είναι: 0

και το συνολικό profit είναι μόνο το καθαρό premium: $0 + 3,50 = 3,50$

Άρα: Μέγιστο κέρδος = 3,50€

Μέγιστη ζημιά Η μέγιστη ζημιά εμφανίζεται στις ακραίες περιοχές: $S_T \leq 85$ ή $S_T \geq 115$

Εκεί η συνολική ζημιά από τα payoffs σταθεροποιείται στο: -5

και προσθέτουμε το καθαρό premium: $-5 + 3,50 = -1,50$

Άρα: Μέγιστη ζημιά = 1,50€

Νεκρά σημεία (Break-even) Υπάρχουν δύο break-even points.

Κάτω break-even Στην περιοχή: $85 < S_T < 90$ μόνο το short put ασκείται.

Τότε το συνολικό payoff είναι: $-\max(90 - S_T, 0) = -(90 - S_T) = S_T - 90$

Άρα το συνολικό profit είναι: $S_T - 90 + 3,50$

Θέτουμε ίσο με 0: $S_T - 90 + 3,50 = 0 \rightarrow S_T - 86,50 = 0 \rightarrow S_T = 86,50$

Άρα το κάτω break-even είναι: 86,50€

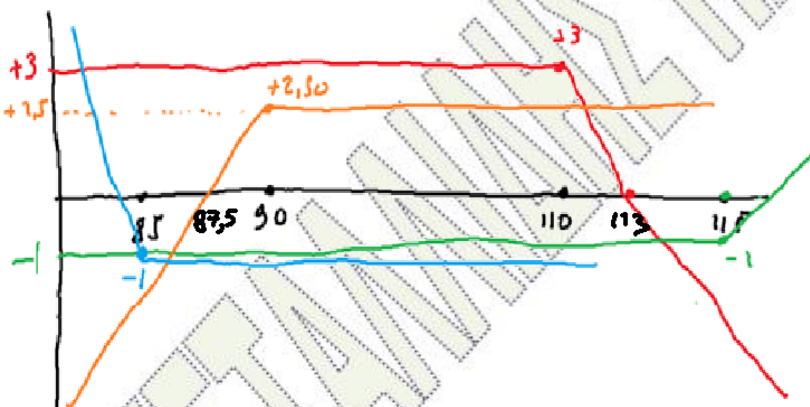
Άνω break-even Στην περιοχή: $110 < S_T < 115$ μόνο το short call ασκείται.

Τότε το συνολικό payoff είναι: $-\max(S_T - 110, 0) = -(S_T - 110)$

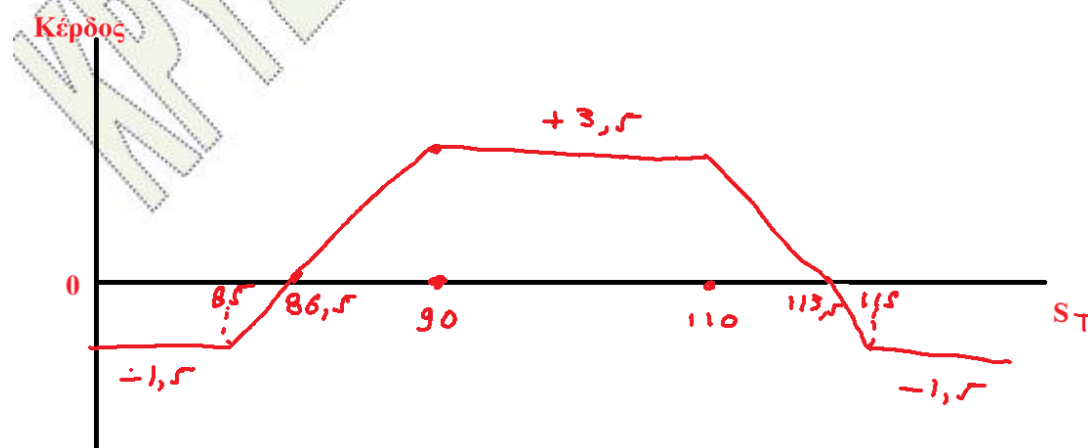
Άρα το συνολικό profit είναι: $-(S_T - 110) + 3,50$

Θέτουμε ίσο με 0: $-(S_T - 110) + 3,50 = 0 \rightarrow S_T = 113,50$

Άρα το άνω break-even είναι: 113,50€



γ) Διάγραμμα απολαβής της Στρατηγικής



ΘΕΜΑ 3

Μια μετοχή έχει τιμή €100 και το ετήσιο επιτόκιο χωρίς κίνδυνο είναι 6%.

α) Υπολογίστε τη **θεωρητική τιμή** του προθεσμιακού συμβολαίου (forward) της μετοχής με διάρκεια ένα έτος.

β) Υποθέστε ότι η **παρατηρούμενη τιμή** του προθεσμιακού συμβολαίου με διάρκεια ένα έτος είναι €107. Υπάρχουν ευκαιρίες **εξισορροπητικής κερδοσκοπίας (arbitrage)**;

Εάν υπάρχουν, εξηγήστε τη **στρατηγική** που θα ακολουθήσετε για να εκμεταλλευτείτε την ευκαιρία arbitrage και υπολογίστε την **απόδοση της στρατηγικής**.

Απάντηση:

Δεδομένα

$$S_0 = 100€$$

$$r = 6\% = 0.06$$

$$T = 1 \text{ έτος}$$

$$F_{\text{market}} = 107€$$

(α) Θεωρητική τιμή forward

Με συνεχή ανατοκισμό:

$$F_0 = S_0 \cdot e^{(rT)}$$

Άρα η θεωρητική τιμή του forward είναι:

$$F_0 = 106.18€$$

(β) Έλεγχος ευκαιρίας arbitrage

Έχουμε:

$$F_{\text{market}} = 107€$$

$$F_{\text{theoretical}} = 106.18€$$

Άρα:

$$F_{\text{market}} > F_{\text{theoretical}}$$

Επομένως υπάρχει ευκαιρία εξισορροπητικής κερδοσκοπίας και εφαρμόζεται η στρατηγική: Cash and Carry Arbitrage

Στρατηγική Arbitrage

Σήμερα

1. Δανείζομαι 100€
2. Αγοράζω τη μετοχή στην spot αγορά
3. Πουλάω forward με τιμή 107€

Στη λήξη

1. Παραδίδω τη μετοχή μέσω του forward και εισπράττω 107€
2. Αποπληρώνω το δάνειο:
 $100 \cdot e^{(0.06)} = 106.18\text{€}$

Κέρδος από τη στρατηγική

$$\text{Profit} = 107 - 106.18 = 0.82\text{€}$$

Άρα υπάρχει σίγουρο arbitrage κέρδος: 0.82€ ανά μετοχή και ανά forward συμβόλαιο. Άρα απόδοση = κέρδος δια τιμή της μετοχής = $0.82/100 = 0.82\%$

ΘΕΜΑ 4

Η τρέχουσα τιμή μιας μετοχής είναι €50, το ετήσιο επιτόκιο χωρίς κίνδυνο είναι 4% και η μεταβλητότητα της μετοχής είναι 30% ετησίως. Τα δικαιώματα με υποκείμενο τίτλο αυτή τη μετοχή έχουν τιμή εξάσκησης €55 και λήγουν σε 6 μήνες.

- α) Υπολογίστε την τιμή του δικαιώματος αγοράς χρησιμοποιώντας το μοντέλο Black-Scholes.
- β) Υπολογίστε την τιμή του δικαιώματος πώλησης χρησιμοποιώντας την ισοδυναμία put-call.
- γ) Προσδιορίστε το δέλτα του δικαιώματος αγοράς και του δικαιώματος πώλησης.
- δ) Υπολογίστε την ελαστικότητα του δικαιώματος αγοράς αν η τιμή της υποκείμενης μετοχής αυξηθεί κατά 1%.

Δίνεται ότι:

$$N(d_1) = 0.42, N(d_2) = 0.37, C = SN(d_1) - Xe^{-r(T-t)}N(d_2)$$

Απάντηση :

α) Τιμή δικαιώματος αγοράς με Black-Scholes

Ο τύπος του call είναι:

$$C = S_0N(d_1) - Xe^{-r(T-t)}N(d_2)$$

Αντικαθιστούμε: $C = 1.05$

β) Τιμή δικαιώματος πώλησης με put-call parity

Από την ισοδυναμία δικαιωμάτων αγοράς – πώλησης:

$$P = C + Xe^{-r(T-t)} - S_0 = 4,96$$

γ) Δέλτα δικαιώματος αγοράς και πώλησης

$$\text{Για το call: } \Delta_C = N(d_1) = 0,42$$

$$\text{Για το put: } \Delta_P = N(d_1) - 1 = -0,58$$

δ) Ελαστικότητα δικαιώματος αγοράς

$$\text{Η ελαστικότητα του call είναι: } \Omega_C = \frac{\Delta_C \cdot S_0}{C} = 20$$

Επομένως, αν η τιμή της υποκείμενης μετοχής αυξηθεί κατά 1%, τότε η τιμή του δικαιώματος αγοράς θα αυξηθεί περίπου κατά: $20 \cdot 1\% = 20\%$

Αυτές οι λύσεις των θεμάτων αναρτήθηκαν στο facebook γκρούπ του Οικονομικού ΕΚΠΑ, όπου λύνουμε με τους συνεργάτες μου απορίες στους φοιτητές της σχολής και διοργανώνονται τα ΔΩΡΕΑΝ επαναληπτικά meetings, όπου μπορούν να συμμετέχουν όλοι οι φοιτητές, στις εξεταστικές.

Ενημέρωσε τους συμφοιτητές σου για την ύπαρξη του facebook γκρουπ της σχολής που συμμετέχουν 1500 μέλη φοιτητές, που έχει όνομα : **ΕΚΠΑ Τμήμα Οικονομικών Επιστημών (Όλοι οι φοιτητές της σχολής εδώ)**

Γκρουπ LINK → <https://www.facebook.com/groups/oikonomiko.nomikhs/>

Επίσης στην ιστοσελίδα του [Φοιτητικού Διδασκαλείου](#) υπάρχουν αντίστοιχα λυμένα θέματα από όλα τα μαθήματα του Οικονομικού ΕΚΠΑ

Ιστοσελίδα LINK → <https://www.didaskaleio.gr/ekpa-econ.html>

ΘΕΙΟΣ ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ – 26/5/2026