ΤΟΕ – Οικονομετρία – 2023 Σεπτέμβριος

ΘΕΜΑ 1

Με τη μέθοδο OLS εκτιμήθηκε το υπόδειγμα παλινδρόμησης

$$(1) \qquad Q_t = \beta_0 + \beta_1 P_t + \beta_2 Z_t + u_t$$

όπου Q είναι η ζήτηση για καφέ (σε τόνους), P είναι η τιμή του καφέ (σε €/κιλό) και Z είναι η τιμή της ζάχαρης (σε €/κιλό). Με βάση ένα δείγμα 23 μηνών βρέθηκε ότι

$$(X'X)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -0{,}5 \\ 0 & -0{,}5 & 2 \end{pmatrix}, \quad X'Y = \begin{pmatrix} 0{,}1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad SST = 0{,}5\,, \quad SSR = 0{,}3$$

α) (βαθμοί: 1) Να βρεθεί η εκτιμώμενη γραμμή παλινδρόμησης. Να βρεθεί και ερμηνευθεί συντελεστής προσδιορισμού.

$$\hat{b} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -0{,}5 \\ 0 & -0{,}5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}2 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\hat{Q}_t = 0{,}2 + 7P_t + 3Z_t$$

$$R^2 = \frac{0{,}3}{0{,}5} = 0{,}6$$

Το 60% της μεταβλητότητας της ζήτησης του καφέ ερμηνέυεται από τις μεταβολές στην τιμή του καφέ και στην τιμή της ζάχαρης.

β) (βαθμοί: 1) Να βρεθεί ο εκτιμώμενος πίνακας διακυμάνσεων-συνδιακυμάνσεων των εκτιμητών των συντελεστών.

$$V(\hat{b}) = \begin{pmatrix} 0{,}02 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}04 & -0{,}005 \\ 0 & -0{,}005 & 0{,}02 \end{pmatrix}$$

γ) (βαθμοί: 1) Να βρεθεί το 95% διάστημα πρόβλεψης για τη μέση ζήτηση για καφέ όταν η τιμή του καφέ είναι 5€/κιλό και η τιμή της ζάχαρης είναι 2€/κιλό.

$$E(Y_f) = 0,2 + 7 \cdot 5 + 3 \cdot 2 = 41,2 \text{ τόνους}$$

$$s^2_{E(Y_f)} = s^2[X_f'(X'X)^{-1}X_f] = 1$$

$$X_f = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

άρα 95% Διάστημα Πρόβλεψης

$$41,2 \pm 2,086 \cdot \sqrt{1}$$

$$(39,11 \;,\; 43,29)$$

δ)

δ) (βαθμοί: 1) Να ελεγχθεί στατιστικά αν η επίδραση της τιμής του καφέ στη ζήτηση για καφέ είναι τουλάχιστον (>) διπλάσια αυτής της τιμής της ζάχαρης. (α=0,05).

$$H_0: b_1 - 2b_2 = 0$$
$$H_1: b_1 - 2b_2 > 0$$

$$t = \frac{7 - 2 \cdot 3 - 0}{\sqrt{V(b_1 - 2b_2)}} = \frac{1}{\sqrt{0,14}} = 2,67$$

$\lambda^2 \qquad \kappa^2 \qquad 2\lambda\kappa$

$$V(b_1 - 2b_2) = 1^2 V(b_1) + (-2)^2 V(b_2) + 2 \cdot 1 \cdot (-2) \cdot Cov(b_1, b_2)$$

$\lambda = 1 \quad \kappa = -2$

$$= 1 \cdot 0,04 + 4 \cdot 0,02 - 4 \cdot (-0,005) = 0,14$$

$$t = 2,67 \boxed{>} t_{n-k-1,\alpha} = t_{20,\,0.05} = 1,725$$

Απορ. η H_0 συνεπώς **ΕΙΝΑΙ τουλάχιστον διπλάσια σε ε.σ.σ. α=5%**

ε) (βαθμοί: 1) Τι θα άλλαζε στις απαντήσεις των ερωτημάτων α), γ) και δ) αν η ζήτηση για καφέ ήταν μετρημένη σε κιλά; Δίνεται ότι 1 τόνος είναι 1.000 κιλά. Αιτιολογείστε.

$$Q_t^* = \lambda \cdot Q_t = 1000 \cdot Q_t$$

α) $\hat{Q}_t = 200 + 7000\, P_t + 3000\, Z_t$

R^2 ίδιο

γ) (τα ακρα του διαστήματος επι 1000)

δ) t-έλεγχος ίδιος

ΘΕΜΑ 2

Με τη μέθοδο OLS εκτιμήθηκε το υπόδειγμα παλινδρόμησης

$$(1) \qquad S_t = \beta_0 + \beta_1 C_t + \beta_2 I_t + \beta_3 (I_t \cdot C_t) + u_t$$

όπου S είναι η αποταμίευση (σε χιλ. €), C είναι η πανδημία (με $C_t = 1$ αν τον t μήνα υπήρχε πανδημία και $C_t = 0$ αλλού) και I είναι το εισόδημα (σε χιλ. €). Με βάση ένα δείγμα 24 μηνών βρέθηκε ότι

(1) $\hat{S}_t = \underset{(0{,}01)}{0{,}05} + \underset{(0{,}03)}{0{,}15} C_t + \underset{(0{,}05)}{0{,}25} I_t + \underset{(0{,}01)}{0{,}02} (I_t \cdot C_t), \;\; SST = 10, \;\; R^2 = 0{,}6$

(2) $\hat{u}_t^2 = 0{,}42 + 0{,}02 C_t, \;\; R^2 = 0{,}1$

(3) $\hat{u}_t = 0{,}01 - 0{,}03 C_t + 0{,}02 I_t - 0{,}03 (I_t \cdot C_t) + 0{,}05 \hat{u}_{t-1} + 0{,}02 \hat{u}_{t-2}, \;\; R^2 = 0{,}2$

όπου οι αριθμοί σε ( ) είναι τυπικά σφάλματα.

α) (βαθμοί: 1) Ποια είναι η πρόβλεψη για την αποταμίευση όταν υπάρχει πανδημία και το εισόδημα είναι 1.000€; Ποια είναι η πρόβλεψη για την αποταμίευση όταν δεν υπάρχει πανδημία και το εισόδημα είναι 1.400€;

$S_t = 0,05 + 0,15\cdot 1 + 0,25\cdot 1 + 0,02\cdot(1\cdot 1) = 0,47$ χιλ. €

$S_t = 0,05 + 0,15\cdot 0 + 0,25\cdot 1,4 + 0,02\,(1,4\cdot 0) = 0,4$ χιλ. €

EXTRA : Να ερμηνευτεί ο συντελεστής β1

Η αποταμίευση τους μήνες με πανδημία είναι αυξημένη κατα 150€ σε σχέση με τους μήνες που δεν έχει πανδημία.

EXTRA 2 : Αν και στους 24 μήνες του δείγματος επικρατούσε πανδημία, υπάρχει κάποιο πρόβλημα με την εκτίμηση του υποδείγματος?

Ναι, δεν θα μπορούσε να εφαρμόστει η μέθοδος OLS καθώς ο πίνακας $X'X$ θα είχε μηδενική ορίζουσα αρα δεν θα αντιστρεφόταν

β) (βαθμοί: 1) Να ελεγχθεί στατιστικά η σημαντικότητα του υποδείγματος (1). (α=0,05).

F ελεγχος σημαντικότητας υποδείγματος

$H_0 : b_1 = b_2 = b_3 = 0$

$H_1 : b_1 \neq 0$ ή/και $b_2 \neq 0$ ή/και $b_3 \neq 0$

$$F = \frac{R^2/k}{(1-R^2)/(n-k-1)} = \frac{0,6/3}{0,4/20}$$

$F = 10 \boxed{>} F_{3,20,0.05} = 3,098$

Απορ. η H_0 συνολικώς σημαντικό

γ) (βαθμοί: 2) Ποιές υποθέσεις μπορούν να ελεγχθούν με βάση τα υποδείγματα (2) και (3); Να γίνουν οι σχετικοί στατιστικοί έλεγχοι. (α=0,05). Τι συμπεραίνετε για τις ιδιότητες των εκτιμητών των συντελεστών του υποδείγματος (1); Ποιές είναι οι συνέπειες στις προβλέψεις του ερωτήματος α) και στον στατιστικό έλεγχο του ερωτήματος β);

(2) BPG ελεγχος ετεροσκεδαστικότητας

$H_0: \alpha_1 = 0$ (ομο)

$H_1: \alpha_1 \neq 0$ (ετερο)

$BPG = n \cdot R^2 = 24 \cdot 0{,}1 = 2{,}4$

$BPG = 2{,}4 \boxed{<} \chi^2_{1,0.05} = 3{,}841$

Δ.Α. η Ho ισχύει ομοσκεδ/τα

(3) BG ελεγχος αυτοσυσχέτισης έως 2ης τάξης (m=2)

$H_0: \rho_1 = \rho_2 = 0$

$H_1: \rho_1 \neq 0$ ή/και $\rho_2 \neq 0$

$BG = (n-m) \cdot R^2 = (24-2) \cdot 0{,}2 = 4{,}4$

$BG = 4{,}4 \boxed{<} \chi^2_{2,0.05} = 5{,}991$

Δ.Α. η Ho ισχύει

στα κατάλοιπα του αρχικού υποδείγματος δεν υπάρχει αυτοσυσχέτιση έως και 2ης τάξης

Δεδομένου ότι στο υπόδειγμα (1) δεν υπάρχει κάποια παραβίαση υπόθεσης.

Οι ιδιότητες των συντελεστών

Γραμμικοί, Αμερόληπτοι,Συνεπείς , Αποτελεσματικοι

Η προβλεψη στο ερωτημα (α) και ο F ελεγχος του ερωτήματος (β) είναι αξιόπιστοι.

δ) (βαθμοί: 1) Με βάση το ίδιο δείγμα βρέθηκε ότι

(4) $\hat{S}_t = 0{,}06 + 0{,}16C_t + 0{,}26I_t - 0{,}02I_t^2 + 0{,}04(I_t \cdot C_t) - 0{,}01(I_t^2 \cdot C_t),\ \ SSR = 6{,}4$

Με τη χρήση κατάλληλου στατιστικού ελέγχου να επιλέξετε ένα από τα υποδείγματα (1) και (4). (α=0,05). Αιτιολογείστε.

F ελεγχος περιορισμένου υποδείγματος.
συγκριση υποδειγμάτων 1 -Restricted με 2 - Unrestricted

→ $H_0: b_3 = 0, b_5 = 0 \quad (q=2)$

$$F = \frac{SSE_R - SSE_u / q}{SSE_u / (n-k-1)} = \frac{4 - 3{,}6/2}{3{,}6/(24-5-1)}$$

$$= \frac{0{,}4/2}{3{,}6/18} = 1 \; \boxed{<} \; F_{2,18,0.05}$$

Δ.Α. η H_0 σωστώς

καταλληλότερο υποδειγμα το 1-restricted

EXTRA : Αν για τα κατάλοιπα του υποδείγματος (4) ισχύει ότι $Cov(u_i, u_j) \neq 0$.

Ποιές οι ιδιότητες των συντελεστών του υποδείγματος (4) ?

1) υπάρχει αυτοσυσχέτιση στα καταλοιπα
2) Σφάλμα εξειδίκευσης στο υποδειγμα (4)

Αρα οι ιδιότητες είναι
Γραμμικοί, ΜΕΡΟΛΗΠΤΙΚΟΙ, συνεπείς,
ΜΗ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΙΚΟΙ