ΘΕΜΑ 1

Με τη μέθοδο OLS εκτιμήθηκε το υπόδειγμα παλινδρόμησης

$$(1) \qquad C_t = \beta_0 + \beta_1 P_t + \beta_2 E_t + u_t$$

όπου C είναι η κατανάλωση ηλεκτρικής ενέργειας (σε κιλοβατώρες), P είναι η τιμή (σε €/κιλοβατώρα) και E είναι το εμβαδόν της κατοικίας (σε τετραγωνικά μέτρα). Με βάση ένα δείγμα 22 κατοικιών βρέθηκε ότι

$$(X'X)^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad X'Y = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad R^2 = 0{,}75, \quad SSR = 11{,}4$$

α) (βαθμοί: 1) Να βρεθεί η εκτιμώμενη γραμμή παλινδρόμησης. Να ερμηνευθούν οι εκτιμώμενοι συντελεστές κλίσης.

$$\hat{b} = (x'x)^{-1} x'y = \underset{3\times 3}{\begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}} \underset{3\times 1}{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

αρα $\hat{C}_t = 7 - 4P_t + 5E_t$

Ερμηνεια β1 : Για κάθε αυξηση της τιμής του ρεύματος κατα 1 €/κιλοβατόρα, αναμένεται μείωση της κατανάλωσης ενέργειας κατά 4 κιλοβατωρες.
Ερμηνεία β2 : Για κάθε αύξηση του εμβαδού της κατοικίας κατα 1 τ.μ. αναμένεται αύξηση της κατανάλωσης ενέργειας κατα 5 κιλοβατώρες

β) (βαθμοί: 1) Να βρεθεί ο εκτιμώμενος πίνακας διακυμάνσεων-συνδιακυμάνσεων των εκτιμητών των συντελεστών.

$$V(b) = s^2 (x'x)^{-1} = 0{,}2 \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0{,}2 \\ 0 & 0{,}8 & 0 \\ 0{,}2 & 0 & 0{,}4 \end{pmatrix}}$$

$$s^2 = \frac{SSE}{n-k-1} = \frac{3{,}8}{22-2-1} = 0{,}2$$

$$R^2 = \frac{SSR}{SST} \rightarrow 0{,}75 = \frac{11{,}4}{SST} \rightarrow SST = 15{,}2$$

$$SSE = SST - SSR = 15{,}2 - 11{,}4 = 3{,}8$$

γ) (βαθμοί: 1) Να βρεθεί το 95% διάστημα πρόβλεψης για την κατανάλωση ηλεκτρικής ενέργειας όταν η τιμή είναι 1€/κιλοβατώρα και το εμβαδόν της κατοικίας είναι 50 τετραγωνικά μέτρα.

$P_0 = 1$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $E_0 = 50$

$$Y_f = 7 - 4\cdot 1 + 5\cdot 50 = 253 \text{ Kw} \quad \text{όπου } X_f = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 50 \end{bmatrix}$$

$$s^2_{y_f} = s^2\left(1 + x_f' (x'x)^{-1} x_f\right)$$

$$= 0,2\left(1 + \underset{1\times 3}{(1 \;\; 1 \;\; 50)} \underset{3\times 3}{\begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 50 \end{pmatrix}\right)$$

$$= 0,2\cdot\left(1 + (55 \;\; 4 \;\; 101)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 50 \end{pmatrix}\right)$$

$$= 0,2\cdot(1 + 5109) = 1022$$

$$95\% \text{ ΔΠ}: \quad Y_f \pm t_{n-k-1,\alpha/2} \cdot s_{y_f}$$

$$253 \pm t_{19,0.025} \cdot \sqrt{1022}$$

$$253 \pm 2,093 \cdot 31,97$$

$$253 \pm 34$$

$$(219 \, , \, 287)$$

δ) (βαθμοί: 1) Να ελεγχθεί στατιστικά η σημαντικότητα του υποδείγματος (1). (α=0,05).

F ελεγχος σημαντικότητας υποδείγματος

$$H_0: b_1 = b_2 = 0 \quad (0x1)$$

$$H_1: b_1 \neq 0 \text{ ή/και } b_2 \neq 0$$

$$F = \frac{R^2/k}{(1-R^2)/(n-k-1)} = \frac{0{,}75/2}{(1-0{,}75)/(22-2-1)}$$

$$= \frac{0{,}75/2}{0{,}25/19} = 28{,}5 \boxed{>} F_{2,19,0.05} = 3{,}522$$

απορριπτεται η Ho συνεπώς το υπόδειγμα είναι στατιστικά σημαντικό, σε επιπεδο στατιστικης σημαντικότητας α=5%

ε) (βαθμοί: 1) Έστω ότι στο υπόδειγμα (1) συμπεριλαμβάνονταν ως ερμηνευτική μεταβλητή η ψευδομεταβλητή Θ για τον ηλιακό θερμοσίφωνα, όπου $\Theta_t = 1$ αν η t κατοικία έχει ηλιακό θερμοσίφωνα και $\Theta_t = 0$ αλλού. Θα υπήρχε πρόβλημα στην εκτίμηση του υποδείγματος αν **i)** όλες οι κατοικίες στο δείγμα είχαν ηλιακό θερμοσίφωνα, **ii)** οι 20 κατοικίες στο δείγμα είχαν ηλιακό θερμοσίφωνα; Αιτιολογείστε.

Ψευδομεταβλητές
ε) i) τέλεια πολλυσυγραμμικότητα άρα δεν μπορεί να εκτιμηθεί το υπόδειγμα με OLS
ε) ii) δεν υπάρχει πρόβλημα με την εκτίμηση

ΘΕΜΑ 2

Έστω η συνάρτηση παραγωγής Cobb–Douglas $Y_t = \beta_0 K_t^{\beta_1} L_t^{\beta_2} \varepsilon_t$, όπου Y είναι η παραγωγή (σε τεμάχια), K είναι το κεφάλαιο (σε χιλιάδες €) και L είναι η εργασία (σε δεκάδες άτομα). Εκτιμήθηκε το ακόλουθο υπόδειγμα με τη μέθοδο OLS από δείγμα 24 μηνών

$$(1) \qquad \widehat{\ln(Y_t)} = \underset{(0{,}15)}{-0{,}42} + \underset{(0{,}16)}{\overline{0{,}84}}\ln(K_t) + \underset{(0{,}12)}{0{,}24}\ln(L_t)\,, \quad SSR = 0{,}5,\ SST = 0{,}6$$

όπου οι αριθμοί σε ( ) είναι τυπικά σφάλματα.

α) (βαθμοί: 1) Να ερμηνευθούν οι εκτιμώμενοι συντελεστές κλίσης. Ποια είναι η πρόβλεψη για την παραγωγή όταν το κεφάλαιο είναι 50.000€ και εργάζονται 50 άτομα;

β1 : Η ελαστικότητα του προιόντος ώς προς το κεφάλαιο.
Ερμηνεία : Αυξηση του κεφαλαίου κατα 1% αναμένεται να επιφέρει αύξηση του παραγόμενου προιόντος κατα 0,84%

β2: Η ελαστικότητα του προιόντος ώς προς την εργασία.
Ερμηνεία : Αυξηση της εργασίας κατα 1% αναμένεται να επιφέρει αύξηση του παραγόμενου προιόντος κατα 0,24%

ο κεφάλαιο είναι 50.000€ και εργάζονται 50 άτομα;

$K_o = 50 \qquad L_o = 5$

$\ln Y_t = -0,42 + 0,84 \cdot \ln 50 + 0,24 \cdot \ln 5$

$\ln Y_t = 3,25$

e e

$Y_t = e^{3,25} = 25,79 \simeq 26$ ζεύγαρια

β) (βαθμοί: 1) Να ελεγχθεί στατιστικά αν η ελαστικότητα της παραγωγής ως προς το κεφάλαιο είναι μικρότερη της μονάδας. (α=0,05).

t - έλεγχος

$H_0: b_1 = 1$

$H_1: b_1 < 1$

$t = \dfrac{b_1 - c}{s_{b_1}} = \dfrac{0,84 - 1}{0,16} = -1$

$t = -1 \boxed{>} -t_{21,0.05} = -1,721$

Δεν απορ. η H_0 συνεπώς

η ελαστικότητα της παραγωγής ως προς το κεφάλαιο ΔΕΝ είναι στατιστικά μικρότερη της μονάδας σε επιπεδο στατιστικης σημαντικότητας α=5%

γ) (βαθμοί: 1) Έστω τώρα ότι με βάση το ίδιο δείγμα εκτιμήθηκε με τη μέθοδο OLS η ακόλουθη παλινδρόμηση

$$(2) \qquad \widehat{W}_t = \underset{(0,12)}{-0,48} + \underset{(0,11)}{0,22} Z_t, \quad SSE = 0,2$$

όπου $W_t = \ln\left(\frac{Y_t}{K_t}\right)$, $Z_t = \ln\left(\frac{L_t}{K_t}\right)$ και οι αριθμοί σε ( ) είναι τυπικά σφάλματα.

Ποια υπόθεση μπορεί να ελεγχθεί με βάση τις παλινδρομήσεις (1) και (2); Να γίνει ο σχετικός στατιστικός έλεγχος. (α=0,05).

www.didaskaleio.gr τηλεφωνο: 6959055981 info@didaskaleio.gr

,05).

(2) $\ln\left(\frac{Y_t}{K_t}\right) = -0{,}48 + 0{,}22\ln\left(\frac{L_t}{K_t}\right)$

$\ln\left(\frac{Y_t}{K_t}\right) = -0{,}48 + 0{,}22\ln L_t - 0{,}22\ln K_t$

F ελεγχος περιορισμένου υποδείγματος, σύγκριση των 1- U με 2-R και έλεγχος για σταθερές αποδόσεις κλίμακας στην συνάρτηση παραγωγής.

$H_0: b_1 + b_2 = 1$

$H_1: b_1 + b_2 \neq 1$

$$F = \frac{\frac{0{,}2-0{,}1}{1}}{0{,}1/(24-2-1)} = \frac{0{,}1/1}{0{,}1/21} = 21$$

$$F = 21 \boxed{>} F_{1,21,0.05} = 4{,}325$$

Απορρίπτεται η Ho συνεπώς καταλληλότερο υπόδειγμα το 1 unrestricted και επίσης η συνάρτηση παραγωγής ΔΕΝ παρουσιάζει σταθερές αποδόσεις κλίμακας.

δ) (βαθμοί: 1) Για τα κατάλοιπα $\hat{u}$ του υποδείγματος (1) βρέθηκε το αποτέλεσμα

$$(3) \qquad \hat{u}_t^2 = 0{,}04 + 0{,}02K_t - 0{,}01L_t\,, \quad R^2 = 0{,}05$$

Ποια υπόθεση μπορεί να ελεγχθεί με βάση το υπόδειγμα (3); Να γίνει ο σχετικός στατιστικός έλεγχος. (α=0,05). Τι μπορείτε να συμπεράνετε για τις ιδιότητες των OLS εκτιμητών των συντελεστών της (1); Ποιες είναι οι συνέπειες στους ελέγχους των ερωτημάτων β) και γ); Αιτιολογείστε.

BPG ελεγχος ετεροσκεδαστικότητας

$H_0: a_1 = a_2 = 0$ (ομο)

$H_1: a_1 \neq 0$ ή/και $a_2 \neq 0$ (ετερο)

$BPG = nR^2 = 24 \cdot 0{,}05 = 1{,}2$

$BPG = 1{,}2 \boxed{<} X^2_{2,0.05} = 5{,}99$

Δεν απορρίπτεται η Ho συνεπώς τα κατάλοιπα του αρχικού υποδείγματος είναι ομοσκεδαστικά σε ε.σ.σ. α =5%

Ιδιοτητες εκτιμητων

Γραμμικοί
Αμερόληπτοι
Συνεπείς
Αποτελεσματικοι

Ο t ελεγχος του ερωτήματος (β) και ο F Ελεγχος του ερωτήματος (γ) είναι αξιόπιστοι

ε) (βαθμοί: 1) Έστω ότι για τα σφάλματα u του υποδείγματος (1) ισχύει ότι $u_t = 0{,}4u_{t-1} + \eta_t$ όπου η είναι μια μεταβλητή με $\mathrm{Cov}(\eta_t, \eta_s) = 0$ για κάθε $t \neq s$. Τι συμπεραίνετε για τις ιδιότητες των εκτιμητών των συντελεστών του υποδείγματος (1); Να αναπτύξετε κατάλληλη διαδικασία για την αμερόληπτη, συνεπή και αποτελεσματική εκτίμηση των συντελεστών του υποδείγματος (1). Αιτιολογείστε.

Εχουμε αυτοσυσχέτιση 1ης τάξης άρα

ιδιότητες εκτιμητών

Γραμμικοι

Αμερόληπτοι

Συνεπείς

Όχι αποτελεσματικοί

Διόρθωση αυτοσυσχέτισης 1ου βαθμού με μέθοδο Cohrane - Orcutt

Διόρθωση αυτοσυσχέτισης 1ης τάξης. $(n_t = u_t - \overset{p}{0{,}4}\, u_{t-1})$

Μεθοδος : Cohrane - Orcutt

(1) $\ln(Y_t) = b_0 + b_1 \ln(K_t) + b_2 \ln(L_t) + u_t$ ①

• υστερουν 1 $\ln(Y_{t-1}) = b_0 + b_1 \ln(K_{t-1}) + b_2 \ln(L_{t-1}) + u_{t-1}$

• επι 0,4 $0{,}4 \ln(Y_{t-1}) = 0{,}4 b_0 + 0{,}4 b_1 \ln(K_{t-1}) + 0{,}4 b_2 \ln(L_{t-1}) + 0{,}4 u_{t-1}$ ②

• (1) − (2)

$$\ln(Y_t) - 0{,}4 \ln(Y_{t-1}) = b_0 - 0{,}4 b_0 + b_1 \ln(K_t) - 0{,}4 b_1 \ln(K_{t-1}) + b_2 \ln(L_t) - 0{,}4 b_2 \ln(L_{t-1}) + u_t - 0{,}4 u_{t-1}$$

$$\ln(Y_t) - 0{,}4 \ln(Y_{t-1}) = 0{,}6 b_0 + b_1 \left(\ln(K_t) - 0{,}4 \ln(K_{t-1})\right) + b_2 \left(\ln(L_t) - 0{,}4 \ln(L_{t-1})\right) + u_t - 0{,}4 u_{t-1}$$

$$Y^* = b_0^* + b_1 \cdot K_t^* + b_2 L_t^* + n_t$$

όπου τα νέα κατάλοιπα ηt δεν αυτοσυσχετίζονται